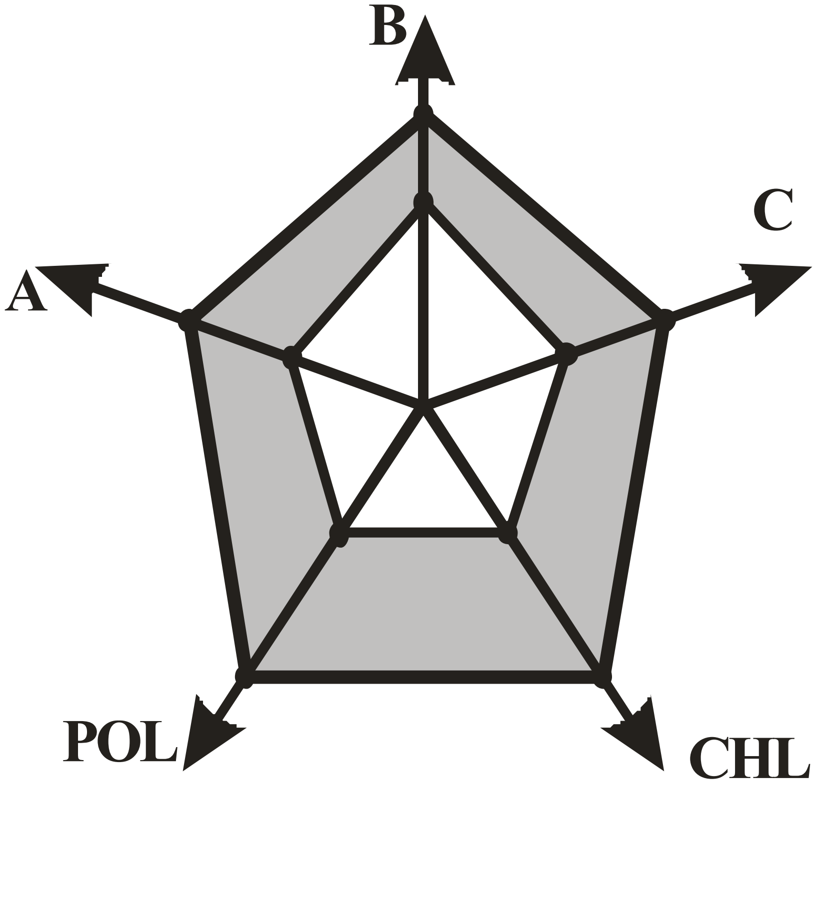
Е.А. Печеный, Н.К. Нуриев, С.Д. Старыгина

Экономико-математические модели в управлении

подготовка IT инженеров в метрическом компетентностном формате



Казань 2016

УДК
ББК

Рецензенты:
д.п.н., профессор Е.А. Корчагин
д.т.н., профессор В.И. Заботин

Печеный, Е.А.

Экономико-математические модели в управлении: учеб. пособие / Е.А. Печеный, Н.К. Нуриев, С.Д. Старыгина. – Казань: Центр инновационных технологий, 2016. – 224 с.

В учебном пособии кроме содержания предметной области разработано авторское формализованное руководство для пользователя, чтобы он эффективно (быстро и на требуемом качественном уровне) мог освоить компетенцию. Особенно такое руководство необходимо иметь, когда подготовка (самоподготовка) ведется с использованием дистанционных технологий, т.е. когда студент, в основном, сам организует свою работу в интерактивном режиме по освоению и диагностике качества владения компетенцией.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 15-07-05761)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Моделирование вообще и модель как понятие в частности восходят к латинскому слову ***modulus,*** которое в переводе на русский означает мера. Таким образом, модель в широком смысле можно определить как объект, соизмеримый в некоторых наиболее существенных чертах с оригиналом, то есть с предметом моделирования. Процедура моделирования является важнейшим инструментом процесса познания, поскольку позволяет значительно ускорить и удешевить изучение сложных объектов и явлений, воздействие на которые невозможно или недопустимо. В экономических исследованиях совершенно не применяются натурные (физические) модели, широко используемые в механике, гидродинамике, химии и других естественных науках. Этим объясняется значительный и постоянно растущий интерес к математическим моделям, как при построении экономической теории, так и для решения прикладных задач.

В самом общем понимании математическая модель представляет собой систему уравнений, дополненную при необходимости равенствами, неравенствами, логическими выражениями, которые устанавливают функциональную связь между переменными изучаемого объекта. Принято различать два типа переменных: ***факторные переменные*** или просто ***факторы*** и ***результативные переменные*** или, как их еще называют, ***отклики***. Факторами называются свободно варьируемые независимые переменные, определяющие состояние моделируемого объекта. Некоторые из факторных переменных допускают целенаправленные изменения по желанию исследователя и, следовательно, могут быть использованы для решения задач управления, другие доступны только наблюдению. Целесообразность включения в состав модели тех или иных факторов зависит от конкретных особенностей моделируемого объекта и требований, предъявляемых к адекватности создаваемой модели. В ряде случаев в качестве самостоятельной факторной переменной присутствует время. Откликами называются переменные, зависимые от факторных и характеризующие какую либо сторону функционирования объекта. В экономико-математических моделях в качестве откликов фигурируют такие переменные, как объем производства, величина прибыли, себестоимость продукции и т.п. Таким образом, математическая модель это конструкция вида

$$y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n),$$

где y – результативная переменная (отклик), $x_i\ i=\overline{1,n}$ - факторные переменные.

По особенностям подхода, используемого в процессе их построения, математические модели подразделяются на ***предметно-физические*** и ***абстрактно-знаковые***. Предметно-физическими называются модели, построенные на основании фундаментальных законов природы или общественного развития, или являющихся математической формой выражения этих законов. Классическими примерами таких моделей может служить, например, закон всемирного тяготения, устанавливающий связь между силой притяжения материальных тел и расстоянием между ними, уравнение Навье-Стокса в гидродинамике, уравнение теплопроводности в термодинамике и множество других подобных математических конструкций. Эти модели описывают сущностные стороны явлений и обладают свойством всеобщности, то есть их применение не ограничивается ни временем, ни местом, ни какими либо привходящими обстоятельствами. Примерами экономических понятий, обладающих соответствующими атрибутами, являются закон убывающей предельной полезности, закон нулевого дохода, аксиома производителя и т.п.

Целью математического моделирования, как правило, является выявление или подтверждение количественных закономерностей, описывающих поведение оригинала. Существенным при этом является то обстоятельство, что в большинстве прикладных исследований нет необходимости (или времени) добиваться объяснения фундаментальных свойств объекта до принятия управленческих решений в процессе его практического использования, т.к. потребность отыскания оптимального в некотором узком смысле решения должна удовлетворяться быстрее, чем будет найдено его полное обоснование. Соответствующие количественные взаимосвязи выявляются в ходе обработки материалов, полученных по результатам экспериментальных наблюдений. Модели такого типа называются абстрактно-знаковыми. Они не претендуют на всеобщность и создаются исключительно и <u>только</u> для описания конкретного объекта с целью вынесения суждений об отдельных особенностях его поведения посредством формальных процедур. В качестве примера можно привести зависимость силы сопротивления жидкости при обтекании твердого тела от формы его поверхности. Подобные модели создаются и находят широкое применение при проектировании судов, торпед, подводных элементов плотин и т. п., однако результаты моделирования будут сильно зависеть от реологических свойств жидкости, скорости ее течения, размеров обтекаемого предмета. Поэтому модель, построенная по материалам испытаний в пресной воде, не может быть использована для описания аналогичного явления в воде морской, а модель обтекания водой опор моста совершенно не пригодна для анализа движения торпеды. Применение абстрактно-знаковых моделей в экономических приложениях может быть проиллюстрировано зависимостью себестоимости продукции от объема производства, которая повсеместно используется при решении задач управления производственной деятельности. Естественно, что параметры моделей, описывающих крупнотоннажное производство, значительно отличаются от моделей штучного производства, а модели, построенные для предприятия угледобывающей отрасли, неприменимы для предприятий текстильной промышленности или учреждений общественного питания.

При создании абстрактно-знаковых моделей, как с практической, так и с методологической точек зрения, весьма важным оказывается вопрос выбора вида функции, связывающей результативную переменную с факторными. Единых рекомендаций на этот счет не существует и, по-видимому, в принципе не может существовать. Поэтому при выборе предполагаемого вида функции связи первостепенное значение имеет опыт и широта кругозора специалиста, занятого построением математической модели, а также объем априорной информации о моделируемом объекте, которым он располагает. Заметим, однако, что если целью математического моделирования является описание поведения изучаемого объекта, а не объяснение механизма его функционирования, то, следуя принципу простоты, функциональная зависимость выбирается в виде алгебраического или тригонометрического полинома

$$y_j = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i + \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} a_{ii} x_{ii}^2 + \ldots\ldots + \varepsilon \qquad j = \overline{1,n}$$

где ε – слагаемое, учитывающее влияние вектора случайных воздействий. Предполагается, что **M**(ε) = 0, а **D**(ε) ≠ 0.

Область математического моделирования, изучающая разновидности абстрактно-знаковых моделей в экономических приложениях, а также способы их построения, верификации и использовании в процессе принятия управленческих решений называется ***Эконометрикой***. Именно этому посвящен первый раздел предлагаемого пособия.

Самостоятельное изучение материалов, содержащихся в пособии, предполагает знакомство читателя с элементами математического анализа, теории вероятностей и математической статистики в объеме, предусмотренном программой подготовки бакалавров технических специальностей.

Раздел 1. Эконометрика

1.1. Метод наименьших квадратов. Регрессионные модели

Рассмотрим процедуру построения полиномиальной абстрактно-знаковой модели, устанавливающей зависимость результативной переменной y от факторных переменных x_j $j=\overline{1,n}$ по материалам m наблюдений. Без потери общности можно положить, что на основании анализа априорной информации в качестве модели выбран алгебраический полином первой степени. Поскольку, как было упомянуто во введении, наблюдаемые значения результативного признака y_i $i=\overline{1,m}$ несут на себе влияние случайной ошибки, обусловленной действием ряда неучтенных факторов, будем обозначать $\hat{y}_i$ значение результативной переменной, вычисленное посредством построенной модели в точке, соответствующей i-ому наблюдению. Отсюда следует, что $y_i = \hat{y}_i + \varepsilon_i$, а сама модель имеет вид:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots\ldots + b_n x_n \tag{1.1}$$

Подобные модели называются ***регрессионными***. А полученная функциональная зависимость называется ***регрессионным уравнением***.

Выдающийся немецкий математик К.Ф. Гаусс показал, что наиболее простым условием получения наилучших в некотором смысле параметров регрессионного уравнения, является требование минимизации суммы квадратов отклонений наблюдаемых значений результативного признака от вычисленных по всему массиву наблюдений, то есть $min\,F = \sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$, или, с учетом принятого вида регрессионной зависимости (1.1)

$$min\,F = \sum_{i=1}^{m}\left(y_i - b_0 - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i} - \ldots\ldots - b_n x_{ni}\right)^2 \tag{1.2}$$

Введем фиктивную переменную $x_0 \equiv 1$ для всех опытов и, используя необходимое условие существования экстремума, продифференцируем выражение (1.2) по всем входящим в его состав параметрам b_i.

$$\frac{\partial F}{\partial b_0}=\sum_{i-1}^{m}\left[2\left(y_i-b_0x_{0i}-b_1x_{1i}-.........-b_nx_{ni}\right)\right]\left(-x_{0i}\right)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_1}=\sum_{i-1}^{m}\left[2\left(y_i-b_0x_{0i}-b_1x_{1i}-.........-b_nx_{ni}\right)\right]\left(-x_{1i}\right)=0$$

....

$$\frac{\partial F}{\partial b_n}=\sum_{i-1}^{m}\left[2\left(y_i-b_0x_{0i}-b_1x_{1i}-.........-b_nx_{ni}\right)\right]\left(-x_{ni}\right)=0,$$

откуда после элементарных преобразований получим систему $n+1$ линейных алгебраических уравнений с $n+1$ неизвестными

$$\begin{aligned}
&b_0\sum_{i=1}^{m}x_{0i}^2+b_1\sum_{i=1}^{m}x_{0i}x_{1i}+..........+b_n\sum_{i=1}^{m}x_{0i}x_{ni}=\sum_{i=1}^{m}x_{0i}y_i\\
&b_0\sum_{i=1}^{m}x_{0i}x_{1i}+b_1\sum_{i=1}^{m}x_{1i}^2+..........+b_n\sum_{i=1}^{m}x_{1i}x_{ni}=\sum_{i=1}^{m}x_{1i}y_i\\
&...\\
&b_0\sum_{i=1}^{m}x_{0i}x_{ni}+b_1\sum_{i=1}^{m}x_{1i}x_{ni}+..........+b_n\sum_{i=1}^{m}x_{ni}^2=\sum_{i=1}^{m}x_{0i}y_i\ ,
\end{aligned}\tag{1.3}$$

решив которую найдем коэффициенты регрессионного уравнения. Описанная процедура носит название ***метод наименьших квадратов*** **(МНК)**, в зарубежных источниках ***list square method*** **(LSM)**.

Заметим, что в процессе построения регрессионной модели с помощью МНК используются исключительно и только результаты, полученные в ходе наблюдений за объектом на ограниченном промежутке времени и в ограниченной области факторного пространства. Подобные модели являются типичными абстрактно-знаковыми и не могут претендовать на объяснение механизма функционирования оригинала. Более того, разумная интерпретация модели возможна только в той части факторного пространства, которая находится внутри выпуклой оболочки натянутой на точки, формирующие массив наблюдений. Достоверность модели вне этой области, по меньшей мере, сомнительна. Расширение зоны применимости модели достигается только путем увеличения массива наблюдений и соответствующей корректировки параметров модели.

Точки факторного пространства, где осуществлялись наблюдения, представляет собой матрицу

$$
X = \begin{pmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} \ldots\ldots x_{1n} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \ldots\ldots x_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m0} & x_{m1} & x_{m2} \ldots\ldots x_{mn} \end{pmatrix}
$$

размерности $m \times n+1$, а наблюдаемые значения результативной переменной вектор $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_m \end{pmatrix}$ размерности $m \times 1$. Поэтому в соответствии правилами действий над матрицами система уравнений (1.3) в матричной форме записи имеет вид $\left(X^T X\right) B = X^T Y$, где B- вектор оценок параметров регрессионной модели размерности $(n+1) \times 1$, который и является решением этого матричного уравнения

$$
B = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y \qquad (1.4)
$$

Матрица $\left(X^T X\right)$ называется ***информационной*** матрицей системы (1.3), а матрица $\left(X^T X\right)^{-1}$ ***ковариационной*** матрицей системы (1.3).

1.2. Модели парной регрессии

Парная (простая) регрессия представляет собой модель, где среднее значение зависимой (объясняемой) переменной рассматривается как функция одной независимой (объясняющей) переменной x, т.е. это модель вида:

$$
\hat{y}_x = f(x).
$$

Так же y называют *результативным признаком*, а x *признаком-фактором*.

Практически в каждом отдельном случае величина y складывается из двух слагаемых:

$$y = \hat{y}_x + \varepsilon,$$

где y – *наблюдаемое значение* результативного признака; $\hat{y}_x$ – *значение* результативного признака, найденное исходя из уравнения регрессии; ε – *случайная величина*, характеризующая отклонения реального значения результативного признака от вычисленного.

Случайная величина ε называется также *возмущением*. Она включает влияние не учтенных в модели факторов, случайных ошибок и особенностей измерения. Ее присутствие в модели порождено тремя источниками: спецификацией модели, конечным объемом наблюдаемой выборки, особенностями измерения переменных.

Наибольшую опасность в практическом использовании методов регрессии представляют *ошибки измерения*. Если ошибки спецификации можно уменьшить, изменяя форму модели (вид математической формулы), а ошибки выборки – увеличивая объем исходных данных, то ошибки измерения устранить значительно сложнее. Предполагая, что ошибки измерения сведены к минимуму, основное внимание в эконометрических исследованиях уделяется ошибкам спецификации модели.

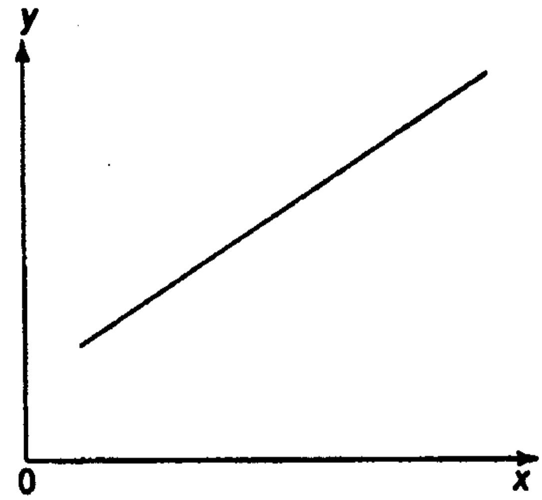
В парной регрессии выбор вида математической функции $y_x = f(x)$ может быть осуществлен тремя методами:

1)графическим;

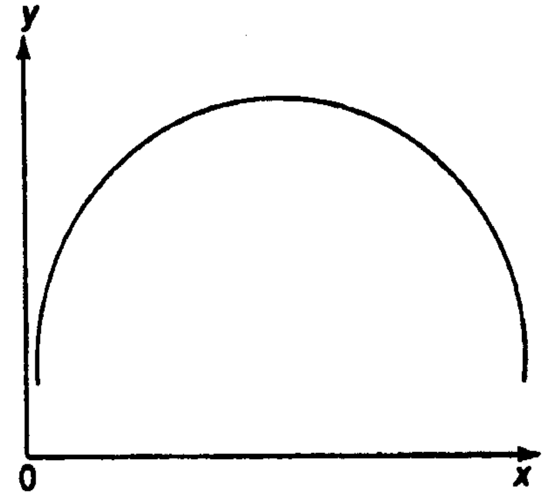
2)аналитическим – т.е. исходя из априорных представлений об изучаемой взаимосвязи;

3)экспериментальным.

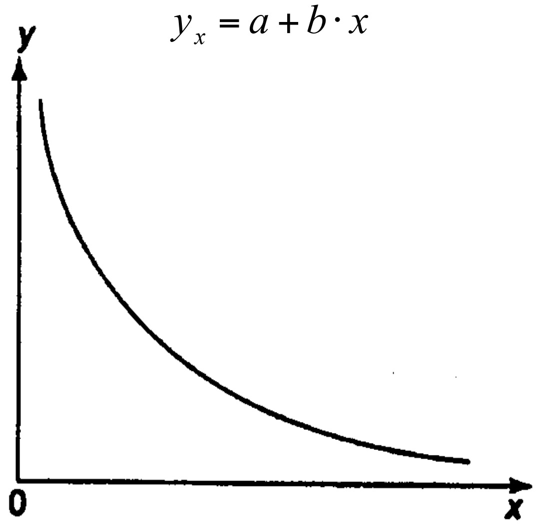
При изучении зависимости между двумя признаками графический метод подбора вида уравнения регрессии достаточно нагляден. Он основан на поле корреляции. Основные типы кривых, используемые при количественной оценке связей, представлены на рис. 1.



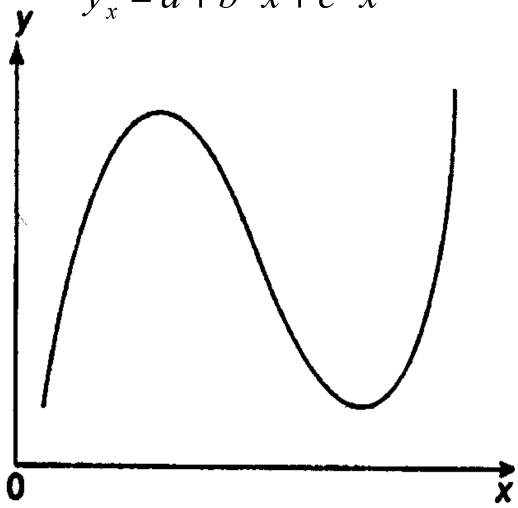
$$y_x = a + b \cdot x$$



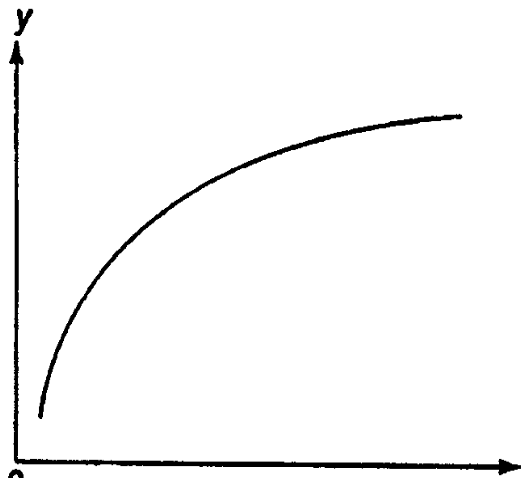
$$y_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2$$



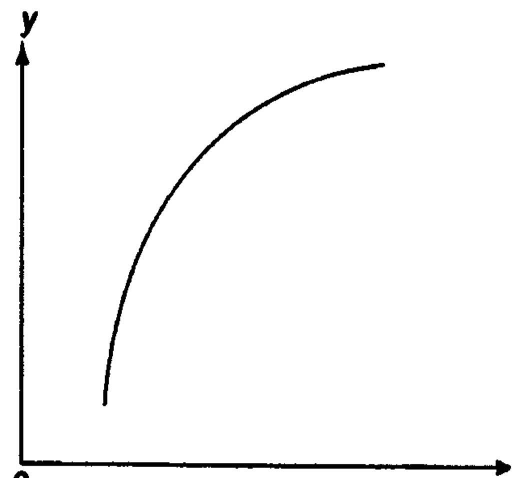
$$y_x = a + b/x$$



$$y_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3$$



$$y_x = a \cdot x^b$$



$$y_x = a \cdot b^x$$

Рис.1. Основные типы кривых

Значительный интерес представляет аналитический метод выбора типа уравнения регрессии. Он основан на изучении материальной природы связи исследуемых признаков.

В практических исследованиях, как правило, имеет место некоторое рассеяние точек относительно линии регрессии. Оно обусловлено влиянием прочих, не учитываемых в уравнении регрессии, факторов. Иными словами, имеют место отклонения фактических данных от расчетных $\left(y - y_x\right)$. Величина этих отклонений и лежит в основе расчета *остаточной дисперсии*:

$$\sigma^2_{\text{ост}} = \frac{1}{n}\sum\left(y - y_x\right)^2$$

Чем меньше величина остаточной дисперсии, тем меньше влияние не учитываемых в уравнении регрессии факторов и тем лучше уравнение регрессии соответствует к результатам наблюдений.

Считается, что число наблюдений должно в 7-8 раз превышать число рассчитываемых параметров при факторной переменной. Это означает, что строить уравнение линейной регрессии, имея менее 7 наблюдений, вообще не имеет смысла. Если вид функции усложняется, а чисто параметров, подлежащих оценке, возрастает, то требуется увеличение объема наблюдений. Значит, если в качестве вида регрессионной зависимости выбран полином второй степени $y_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2$, то требуемый объем наблюдений должен быть не менее 14.

Рассмотрим простейшую модель парной регрессии – *линейную регрессию*. Линейная регрессия находит широкое применение в эконометрике ввиду возможности четкой экономической интерпретации ее параметров.

Линейная регрессия сводится к нахождению уравнения вида

$$y_x = a + b \cdot x \text{ или } y = a + b \cdot x + \varepsilon. \tag{1.5}$$

Построение линейной регрессии сводится к оценке ее параметров – a и b, а система уравнений (1.3) для этого случая принимает простой вид

$$\begin{cases} a \cdot n \quad + b \cdot \sum x = \sum y; \\ a \cdot \sum x + b \cdot \sum x^2 = \sum x \cdot y. \end{cases} \tag{1.6}$$

который позволяет получить удобные расчетные соотношения для вычисления коэффициентов модели

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}, b = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x^2}, \tag{1.7}$$

где $\operatorname{cov}(x,y) = \overline{y \cdot x} - \overline{y} \cdot \overline{x}$ – *ковариация* признаков x и y, $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ – *дисперсия* признака x, а

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x,\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum y,\ \overline{y \cdot x} = \frac{1}{n}\sum y \cdot x,\ \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x^2.$$

Параметр b называется *коэффициентом регрессии*. Его величина показывает на сколько в среднем изменяется результативная переменная при изменении фактора на одну единицу.

Возможность четкой смысловой интерпретации коэффициента регрессии сделала линейное уравнение регрессии достаточно распространенным в эконометрических исследованиях.

Из вида линейной зависимости ясно, что формально параметр a есть значение переменной y при $x = 0$. Если факторная переменная x не может иметь нулевого значения, то вышеуказанная трактовка свободного члена a не имеет смысла, т.е. параметр a может не иметь содержательно значения подобно коэффициенту регрессии. Уравнение регрессии полезно дополнить показателем тесноты связи между входящими в его состав переменными. При использовании парной линейной регрессии в качестве такого показателя выступает *линейный коэффициент корреляции* r_{xy}, который рассчитывается по формулам:

$$r_{xy} = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \tag{1.8}$$

Как известно из курса математической статистики, его значение находится в пределах: $-1 \le r_{xy} \le 1$. Чем ближе абсолютное значение r_{xy}

к единице, тем сильнее линейная связь между факторами. При $r_{xy} = \pm 1$ имеет место строгая линейная зависимость. Следует, однако, иметь в виду, что близость абсолютной величины линейного коэффициента корреляции к нулю еще не означает отсутствия связи между признаками как таковой. При другой (нелинейной) спецификации модели связь между признаками может оказаться весьма существенной, но для ее оценки должна быть использована другая мера тесноты связи.

Степень соответствия линейной функции наблюдаемой зависимости оценивается по величине квадрата линейного коэффициента корреляции r_{xy}^2, называемого *коэффициентом детерминации*, который характеризует долю дисперсии результативного признака y, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака:

$$r_{xy}^2 = \frac{\sigma_{\text{факт}}^2}{\sigma_y^2} = 1 - \frac{\sigma_{\text{ост}}^2}{\sigma_y^2}, \tag{1.9}$$

где $\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum\left(y - \bar{y}\right)^2$, $\sigma_{\text{факт}}^2 = \frac{1}{n}\sum\left(y_x - \bar{y}\right)^2$, $\sigma_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{n}\sum\left(y - y_x\right)^2$.

Соответственно величина $1 - r_{xy}^2$ характеризует долю дисперсии результативного признака y, обусловленную влиянием факторов, не учтенных в модели.

Общее суждение о качестве модели можно составить по величине *средней ошибки аппроксимации*:

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y - y_x}{y}\right| \cdot 100\% \tag{1.10}$$

Если ее величина не превышает 10%, то качество модели признается удовлетворительным.

После того как найдено уравнение линейной регрессии, проводится оценка статистической значимости как уравнения в целом, так и отдельных его элементов.

Проверить значимость уравнения регрессии означает установить: соответствует ли математическая модель, выражающая зависимость между переменными, данным наблюдений и достаточно ли включенных в уравнение объясняющих переменных (одной или нескольких) для описания изменений зависимой переменной.

Оценка значимости уравнения регрессии в целом производится с помощью F-*критерия Фишера*. Согласно основной идее дисперсионного анализа, *общая сумма квадратов отклонений* переменной y от среднего значения $\bar{y}$ раскладывается на две части – «*объясненную*» и «*необъясненную*»:

$$\sum\left(y-\bar{y}\right)^2=\sum\left(y_x-\bar{y}\right)^2+\sum\left(y-y_x\right)^2,$$

где $\sum\left(y-\bar{y}\right)^2$ *– общая сумма квадратов отклонений;* $\sum\left(y_x-\bar{y}\right)^2$ *– сумма квадратов отклонений, объясненная регрессией (или факторная сумма квадратов отклонений);* $\sum\left(y-y_x\right)^2$ *– остаточная сумма квадратов отклонений, характеризующая влияние неучтенных в модели факторов*.

Схема дисперсионного анализа имеет вид, представленный в таблице 1 (n – число наблюдений, m – число параметров при переменной x).

Таблица 1

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсия на одну степень свободы
Общая	$\sum\left(y-\bar{y}\right)^2$	$n-1$	$S^2_{\text{общ}}=\dfrac{\sum\left(y-\bar{y}\right)^2}{n-1}$
Факторная	$\sum\left(y_x-\bar{y}\right)^2$	m	$S^2_{\text{факт}}=\dfrac{\sum\left(y_x-\bar{y}\right)^2}{m}$
Остаточная	$\sum\left(y-y_x\right)^2$	$n-m-1$	$S^2_{\text{ост}}=\dfrac{\sum\left(y-y_x\right)^2}{n-m-1}$

Находя отношение факторной суммы квадратов отклонений к остаточной в расчете на одну степень свободы, получим величину F-критерия Фишера:

$$F = \frac{S^2_{\text{факт}}}{S^2_{\text{ост}}}. \tag{1.11}$$

Найденное значение F-критерия Фишера сравнивается с табличным значением $F_{\text{табл}}\left(\alpha; k_1; k_2\right)$ для выбранного уровня значимости α и степеней свободы $k_1 = m$ и $k_2 = n - m - 1$. Если значение F-критерия больше табличного, то признается статистическая значимость модели в целом.

Для парной линейной регрессии $m = 1$, поэтому соотношение (1.11) принимает вид

$$F = \frac{S^2_{\text{факт}}}{S^2_{\text{ост}}} = \frac{\sum\left(y_x - \bar{y}\right)^2}{\sum\left(y - y_x\right)^2} \cdot \left(n - 2\right).$$

Нетрудно показать, что величина F-критерия связана с коэффициентом детерминации r^2_{xy}, и ее можно рассчитать по формуле:

$$F = \frac{r^2_{xy}}{1 - r^2_{xy}} \cdot \left(n - 2\right). \tag{1.12}$$

При построении регрессионных моделей целесообразно оценить значимость не только уравнения в целом, но и отдельных его параметров. С этой целью для каждого параметра определяется его *стандартная ошибка*: m_b и m_a.

Стандартная ошибка коэффициента регрессии определяется по формуле:

$$m_b = \sqrt{\frac{S^2_{\text{ост}}}{\sum\left(x - \bar{x}\right)^2}} = \sqrt{\frac{S^2_{\text{ост}}}{n \cdot \sigma^2_x}},$$

Величина стандартной ошибки совместно с t-*распределением Стьюдента* при $n - 2$ степенях свободы применяется для проверки статистической существенности коэффициента регрессии и для расчета его доверительного интервала.

Для оценки существенности коэффициента регрессии вычисляется его отношение к величине стандартной ошибки, т.е. определяется значение t-критерия Стьюдента: $t_b = \dfrac{b}{m_b}$ которое затем сравнивается с табличным значением при выбранном уровне значимости α и числе степеней свободы $(n-2)$. Доверительный интервал для коэффициента регрессии определяется как $b \pm t_{\text{табл}} \cdot m_b$. Поскольку знак коэффициента регрессии указывает на направление изменения результативного признака границы доверительного интервала для коэффициента регрессии не могут принимать значения разных знаков, например, $-1{,}5 \le b \le 0{,}8$. Подобная ситуация указывает либо на статистическую не значимость параметра, либо на грубую ошибку вычислений.

Стандартная ошибка параметра a определяется по формуле:

$$m_a = \sqrt{S^2_{\text{ост}} \cdot \frac{\sum x^2}{n \cdot \sum (x - \bar{x})^2}} = \sqrt{S^2_{\text{ост}} \cdot \frac{\sum x^2}{n^2 \cdot \sigma_x^2}}.$$

Процедура оценивания существенности данного параметра не отличается от рассмотренной выше для коэффициента регрессии. Вычисляется t-критерий: $t_a = \dfrac{a}{m_a}$, его величина сравнивается с табличным значением при $n-2$ степенях свободы.

Значимость линейного коэффициента корреляции проверяется на основе величины ошибки коэффициента корреляции m_r:

$$m_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}.$$

Значение t-критерия Стьюдента определяется как $t_r = \dfrac{r}{m_r}$.

Известна связь между t-критерием Стьюдента и F-критерием Фишера:

$$|t_b| = |t_r| = \sqrt{F}.$$

В прогнозных расчетах по уравнению регрессии определяется предсказываемое индивидуальное значение $\hat{y}_p$ как точечный прогноз при $x = x_p$, т.е. путем подстановки в линейное уравнение $y_x = a + b \cdot x$ соответствующего значения x. Однако точечный прогноз явно нереалистичен, поэтому он дополняется расчетом стандартной ошибки,

$$m_{y_p} = S_{ост}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_p - \bar{x}\right)^2}{n\sigma_x^2}}$$

и построением доверительного интервала прогнозного значения $\hat{y}_p$:

$$\hat{y}_p = \hat{y}_p \pm m_{y_p} t_{табл}$$

Проиллюстрируем изложенную процедуру на конкретном примере.

Пример 1. На основании опроса восьми групп семей получены данные о связи расходов населения на продукты питания с уровнем доходов семьи, которые представлены в таблице 2.

Таблица 2

Расходы на продукты питания, y, тыс. руб.	0,9	1,2	1,8	2,2	2,6	2,9	3,3	3,8
Доходы семьи, x, тыс. руб.	1,2	3,1	5,3	7,4	9,6	11,8	14,5	18,7

Руководствуясь предположением о линейности связи между доходами семьи и расходами на продукты питания, рассчитаем параметры линейного уравнения парной регрессии. Результаты вычислений представим в форме таблицы 3.

Используя ранее полученные расчетные соотношения, найдем

$$b = \frac{\operatorname{cov}(x,\, y)}{\sigma_x^2} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{26{,}09 - 8{,}95 \cdot 2{,}34}{30{,}56} = 0{,}168;$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 2{,}34 - 0{,}168 \cdot 8{,}95 = 0{,}836.$$

Таблица 3

	x	y	$x \cdot y$	x^2	y^2	y_x	$y - y_x$	$\left(y - y_x\right)^2$	А %
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1,2	0,9	1,08	1,44	0,81	1,038	-0,138	0,0190	15,33

2	3,1	1,2	3,72	9,61	1,44	1,357	-0,157	0,0246	13,08
3	5,3	1,8	9,54	28,09	3,24	1,726	0,074	0,0055	4,11
4	7,4	2,2	16,28	54,76	4,84	2,079	0,121	0,0146	5,50
5	9,6	2,6	24,96	92,16	6,76	2,449	0,151	0,0228	5,81
6	11,8	2,9	34,22	139,24	8,41	2,818	0,082	0,0067	2,83
7	14,5	3,3	47,85	210,25	10,89	3,272	0,028	0,0008	0,85
8	18,7	3,8	71,06	349,69	14,44	3,978	-0,178	0,0317	4,68
Итого	71,6	18,7	208,71	885,24	50,83	18,717	-0,017	0,1257	52,19
Среднее значение	8,95	2,34	26,09	110,66	6,35	2,34	–	0,0157	6,52
σ	5,53	0,935	–	–	–	–	–	–	–
σ^2	30,56	0,874	–	–	–	–	–	–	–

Получили уравнение: $y_x = 0{,}836 + 0{,}168 \cdot x$. В содержательном смысле это означает, что с увеличением дохода семьи на 1000 руб. расходы на питание в среднем увеличиваются на 168 руб.

Как было упомянуто выше, уравнение линейной регрессии целесообразно дополнить показателем тесноты связи – линейным коэффициентом корреляции r_{xy}:

$$r_{xy} = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0{,}168 \cdot \frac{5{,}53}{0{,}935} = 0{,}994.$$

Близость коэффициента корреляции к 1 указывает на весьма тесную линейную связь между признаками.

Коэффициент детерминации $r_{xy}^2 = 0{,}987$ показывает, что уравнением регрессии объясняется 98,7% дисперсии результативного признака, а на долю прочих факторов приходится лишь 1,3%.

Оценим качество уравнения регрессии в целом с помощью F-критерия Фишера

$$F = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2} \cdot (n-2) = \frac{0{,}987}{1 - 0{,}987} \cdot 6 = 455{,}54.$$

Табличное значение ($k_1 = 1$, $k_2 = n - 2 = 6$, $\alpha = 0{,}05$): $F_{\text{табл}} = 5{,}99$. Так как, $F > F_{табл}$ признается статистическая значимость уравнения в целом.

Для оценки статистической значимости коэффициентов регрессии и коэффициента корреляции рассчитаем t-критерий Стьюдента и доверительные интервалы каждого из показателей. Рассчитаем случайные ошибки параметров линейной регрессии и коэффициента корреляции $\left(S^2_{\text{ост}} = \dfrac{\sum\left(y - y_x\right)^2}{n-2} = \dfrac{0{,}1257}{8-2} = 0{,}021 \right)$:

$$m_b = \frac{S_{\text{ост}}}{\sigma_x \cdot \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{0{,}021}}{5{,}53 \cdot \sqrt{8}} = 0{,}0093,$$

$$m_a = S_{\text{ост}} \cdot \frac{\sqrt{\sum x^2}}{\sigma_x \cdot n} = \frac{\sqrt{0{,}021 \cdot 885{,}24}}{5{,}53 \cdot 8} = 0{,}0975,$$

$$m_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}987}{6}} = 0{,}0465.$$

Расчетные значения t-статистик:

$$t_b = \frac{0{,}168}{0{,}0093} = 18{,}065,\ t_a = \frac{0{,}836}{0{,}0975} = 8{,}574,\ t_r = \frac{0{,}994}{0{,}0465} = 21{,}376.$$

Табличное значение t-критерия Стьюдента при $\alpha = 0{,}05$ и числе степеней свободы $\nu = n - 2 = 6$ есть $t_{\text{табл}} = 2{,}447$. Так как $t_b > t_{\text{табл}}$, $t_a > t_{\text{табл}}$ и $t_r > t_{\text{табл}}$, признаем статистическую значимость параметров регрессии и показателя тесноты связи. Рассчитаем доверительные интервалы для параметров регрессии a и b: $a \pm t \cdot m_a$ и $b \pm t \cdot m_b$. Получим, что $a^* \in \left[0{,}597;\quad 1{,}075\right]$ и $b^* \in \left[0{,}145;\quad 0{,}191\right]$.

Средняя ошибка аппроксимации $A_i = \left|\dfrac{y_i - y_{x_i}}{y_i}\right| \cdot 100\%)$ $\bar{A} = 6{,}52\%$ свидетельствует о хорошем качестве уравнения регрессии.

Для визуальной оценки качества полученной модели, на одном графике изобразим исходные данные и линию регрессии (рис.2).

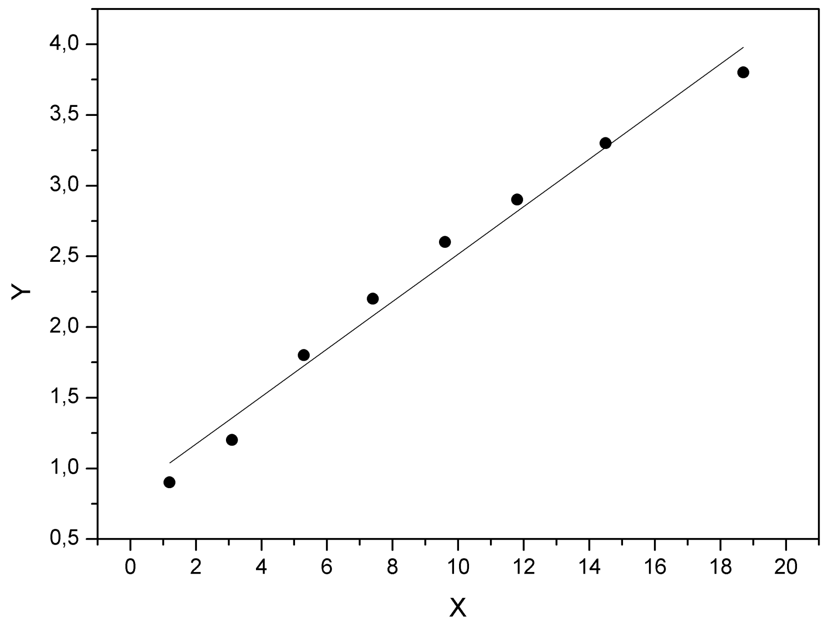


Рис.2. Исходные данные и линия регрессии

Результаты графических построений подтверждают высокую степень соответствия построенной модели результатам наблюдений.

1.3. Нелинейные модели парной регрессии и корреляция

Если между экономическими явлениями существуют нелинейные соотношения, то они выражаются с помощью соответствующих нелинейных функций.

Различают два класса *нелинейных регрессий*:

1.Регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам, например

– полиномы различных степеней – $y_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2$, $y_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3$;

– равносторонняя гипербола – $y_x = a + b/x$;

– полулогарифмическая функция – $y_x = a + b \cdot \ln x$.

2.Регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам, например

– степенная – $y_x = a \cdot x^b$;

– показательная – $y_x = a \cdot b^x$;

– экспоненциальная – $y_x = \mathrm{e}^{a+b\cdot x}$.

Регрессии нелинейные по включенным переменным приводятся к линейному виду простой заменой переменных, а дальнейшая оценка параметров производится с помощью метода наименьших квадратов. Равносторонняя гипербола $y_x = a + b/x$ может быть использована для описания связи удельных расходов сырья, материалов, топлива с объемом выпускаемой продукции; времени обращения товаров с объемом товарооборота; процента прироста заработной платы с уровнем безработицы (например, кривая А.В. Филлипса); расходов на непродовольственные товары и общей суммы расходов (например, кривые Э. Энгеля) и в других случаях. Гипербола приводится к линейному уравнению простой заменой: $z = {}^{1}\!/_{x}$. Система линейных уравнений для отыскания коэффициентов модели будет иметь вид:

$$\begin{cases} a \cdot n \quad + b \cdot \sum \frac{1}{x} = \sum y; \\ a \cdot \sum \frac{1}{x} + b \cdot \sum \frac{1}{x^2} = \sum \frac{1}{x} \cdot y. \end{cases}$$

Аналогичным образом приводятся к линейному виду зависимости $y_x = a + b \cdot \ln x$, $y_x = a + b \cdot \sqrt{x}$ и ряд других.

Несколько иначе обстоит дело с регрессиями нелинейными по оцениваемым параметрам, которые делятся на два типа: *нелинейные модели внутренне линейные* (приводятся к линейному виду с помощью соответствующих преобразований, например, логарифмированием) и *нелинейные модели внутренне нелинейные* (к линейному виду не приводятся).

К внутренне линейным моделям относятся, например, степенная функция – $y_x = a \cdot x^b$, показательная – $y_x = a \cdot b^x$, экспоненциальная – $y_x = \mathrm{e}^{a+b\cdot x}$, логистическая – $y_x = \dfrac{a}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-c\cdot x}}$, обратная – $y_x = \dfrac{1}{a + b \cdot x}$.

К внутренне нелинейным моделям можно, например, отнести следующие модели: $y_x = a + b \cdot x^c$, $y_x = a \cdot \left(1 - \frac{1}{1 - x^b}\right)$.

Среди нелинейных моделей наиболее часто используется степенная функция $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$, которая приводится к линейному виду логарифмированием:

$$\ln y = \ln\left(a \cdot x^b \cdot \varepsilon\right);$$

$$\ln y = \ln a + b \cdot \ln x + \ln \varepsilon;$$

$$Y = A + b \cdot X + \mathrm{E},$$

где $Y = \ln y$, $X = \ln x$, $A = \ln a$, $\mathrm{E} = \ln \varepsilon$. Т.е. МНК применяется для преобразованных данных:

$$\begin{cases} A \cdot n \quad + b \cdot \sum X = \sum Y, \\ A \cdot \sum X + b \cdot \sum X^2 = \sum X \cdot Y, \end{cases}$$

а затем потенцированием находятся искомые параметры.

Широкое использование степенной функции связано с тем, что параметр b в ней имеет четкое экономическое истолкование – он является *коэффициентом эластичности*, который показывает, на сколько процентов изменится в среднем результативная переменная, если факторная переменная изменится на 1%. Формула для расчета коэффициента эластичности имеет вид:

$$Э = f'(x) \cdot \frac{x}{y}. \qquad (1.13)$$

Так как для других функций коэффициент эластичности не является постоянной величиной, а зависит от соответствующего значения факторной переменной, то в расчетах обычно применяется величина *среднего коэффициент эластичности*:

$$\bar{Э} = f'(\bar{x}) \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}}.$$

В таблице 4 приведены формулы средних коэффициентов эластичности для наиболее часто используемых типов уравнений регрессии.

Таблица 4

Вид функции, y	Первая производная, y'	Средний коэффициент эластичности, $\overline{Э}$
1	**2**	**3**
$y = a + b \cdot x + \varepsilon$	b	$\dfrac{b \cdot \overline{x}}{a + b \cdot \overline{x}}$
$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$	$b + 2c \cdot x$	$\dfrac{(b + 2c \cdot \overline{x}) \cdot \overline{x}}{a + b \cdot \overline{x} + c \cdot \overline{x}^2}$
$y = a + \dfrac{b}{x} + \varepsilon$	$-\dfrac{b}{x^2}$	$-\dfrac{b}{a \cdot \overline{x} + b}$
$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$	$a \cdot b \cdot x^{b-1}$	b
$y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$	$a \cdot \ln b \cdot b^x$	$\overline{x} \cdot \ln b$
$y = a + b \cdot \ln x + \varepsilon$	$\dfrac{b}{x}$	$\dfrac{b}{a + b \cdot \ln \overline{x}}$
$y = \dfrac{a}{1 + b \cdot e^{-c \cdot x + \varepsilon}}$	$\dfrac{a \cdot b \cdot c \cdot e^{-c \cdot x}}{(1 + b \cdot e^{-c \cdot x})^2}$	$\dfrac{b \cdot c \cdot \overline{x}}{b + e^{c \cdot \overline{x}}}$
$y = \dfrac{1}{a + b \cdot x + \varepsilon}$	$-\dfrac{b}{(a + b \cdot x)^2}$	$-\dfrac{b \cdot \overline{x}}{a + b \cdot \overline{x}}$

При интерпретации результатов моделирования уравнение нелинейной регрессии, так же, как и в случае линейной зависимости, дополняется показателем тесноты связи, которая в этом случае оценивается величиной *индекса корреляции*:

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{\text{ост}}}{\sigma^2_y}}, \tag{1.14}$$

где $\sigma^2_y = \frac{1}{n}\sum (y - \overline{y})^2$ – общая дисперсия результативного признака y,

$\sigma^2_{\text{ост}} = \frac{1}{n}\sum (y - y_x)^2$ – остаточная дисперсия.

Величина данного показателя находится в пределах: $0 \le \rho_{xy} \le 1$. Чем ближе значение индекса корреляции к единице, тем теснее связь рассматриваемых признаков в рамках выбранного типа зависимости, а уравнение регрессии статистически надежнее. Квадрат индекса корреляции носит название *индекса детерминации* и характеризует долю дисперсии результативного признака y, объясняемую выбранным типом регрессионной зависимости, в общей дисперсии результативного признака:

$$\rho_{xy}^2 = 1 - \frac{\sigma_{\text{ост}}^2}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_{\text{факт}}^2}{\sigma_y^2},$$

Сравнение индекса детерминации ρ_{xy}^2 с коэффициентом детерминации r_{xy}^2 позволяет оценить степень «нелинейности» объекта исследования. Чем больше кривизна линии регрессии, тем величина r_{xy}^2 сильнее отличается от ρ_{xy}^2. Близость этих показателей указывает на то, что необходимости усложнять форму уравнения регрессии отсутствует и можно с успехом использовать линейную функцию.

Индекс детерминации используется для проверки существенности в целом уравнения регрессии по F-критерию Фишера:

$$F = \frac{\rho_{xy}^2}{1 - \rho_{xy}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m},$$

где ρ_{xy}^2 – индекс детерминации, n – число наблюдений, m – число параметров при переменной x. Значение F-критерия сравнивается с табличным при уровне значимости α и числе степеней свободы $k_2 = n - m - 1$ (для остаточной суммы квадратов) и $k_1 = m$ (для факторной суммы квадратов).

О качестве нелинейного уравнения регрессии можно также судить и по средней ошибке аппроксимации, которая рассчитывается так же, как и для линейного случая.

Построим модель нелинейной регрессии вида $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$, по тем же данным, что были использованы при построении линейной модели в примере 1.

Пример 2. Для нахождения параметров регрессии $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$ необходимо провести ее линеаризацию, как было показано выше:

$Y = A + b \cdot X + E$, где $Y = \ln y,\ X = \ln x,\ A = \ln a,\ E = \ln \varepsilon$.

Для удобства вычислений построим таблицу аналогичную той, что была построена для получения линейной регрессионной модели (таблица 5).

Таблица 5

	X	Y	$X \cdot Y$	X^2	Y^2	y_x	ε	ε^2	A_i
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1,182	-0,105	-0,019	0,033	0,011	0,8149	0,0851	0,0072	9,46
2	1,131	0,182	0,206	1,280	0,033	1,3747	-0,1747	0,0305	14,56
3	1,668	0,588	0,980	2,781	0,345	1,8473	-0,0473	0,0022	2,63
4	2,001	0,788	1,578	4,006	0,622	2,2203	-0,0203	0,0004	0,92
5	2,262	0,956	2,161	5,116	0,913	2,5627	0,0373	0,0014	1,43
6	2,468	1,065	2,628	6,092	1,134	2,8713	0,0287	0,0008	0,99
7	2,674	1,194	3,193	7,151	1,425	3,2165	0,0835	0,0070	2,53
8	2,929	1,335	3,910	8,576	1,782	3,7004	0,0996	0,0099	2,62
Итого	15,315	6,002	14,637	35,035	6,266	18,608	0,0919	0,0595	35,14
Среднее значение	1,914	0,750	1,830	4,379	0,783	–	–	0,0074	4,39
σ	0,846	0,470	–	–	–	–	–	–	–
σ^2	0,716	0,221	–	–	–	–	–	–	–

Вычисляя $b = \dfrac{\operatorname{cov}(X,\ Y)}{\sigma_X^2} = \dfrac{1{,}830 - 1{,}914 \cdot 0{,}750}{0{,}716} = 0{,}551$, и

$A = \overline{Y} - b \cdot \overline{X} = 0{,}750 - 0{,}551 \cdot 1{,}914 = -0{,}305$. Получим уравнение регрессии для преобразованных переменных $Y_x = -0{,}305 + 0{,}551 \cdot X$. И окончательно после потенцирования $y_x = 0{,}737 \cdot x^{0{,}551}$. Далее по формуле (1.14) находим величину индекса корреляции $\rho_{xy} = 0{,}983$ и индекс детерминации $\rho^2 = 0{,}967$, который показывает, что 96,7% вариации результативного признака объясняется вариацией признака-фактора, а 3,3% приходится на долю прочих факторов.

Средняя ошибка аппроксимации: $\bar{A} = 4{,}39\%$. Это свидетельствует, что линия регрессии хорошо приближает исходные данные.

F-критерий Фишера:

$$F = \frac{\rho_{xy}^2}{1-\rho_{xy}^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{0{,}967}{1-0{,}967} \cdot \frac{8-1-1}{1} = 175{,}82,$$

значительно превышает табличное. $F_{табл.} = 5{,}99$, то есть построенная модель статистически значима и адекватно описывает результаты наблюдений. Сравнивая степенную модель с линейной, легко убедиться в их практической равноценности. Если линейное уравнение выглядит несколько предпочтительней по величине индекса детерминации, то степенная модель выигрывает по средней ошибке аппроксимации.

Задачи для самостоятельного решения

№1. В таблице приведены данные о росте мужчин и росте их совершеннолетних сыновей

Рост отцов, x, см	184	176	175	192	168	181	173	178	174	180
Рост сыновей, y, см	188	173	185	184	174	179	173	180	171	183

Найти коэффициент корреляции между ростом отцов и сыновей и выяснить, в какой мере рост сыновей зависит от роста отцов. Трудоемкость – 10 (мин/раб) эксперта.

№2. В таблице приведены наблюдаемые и вычисленные с помощью модели парной степенной регрессии значения прибыли фирмы в зависимости от некоторой факторной переменной

y млн. руб.	10	12	15	17	18	11	13	19
$\hat{y}$ млн. руб.	11	11	17	15	20	11	14	16

Оценить статистическую значимость модели по критерию Фишера и с помощью индекса детерминации установить степень тесноты связи между результативной переменной и фактором в рамках выбранной модели. Трудоемкость – 5 (мин/раб) эксперта.

№3. По результатам 20 наблюдений была построена модель парной линейной регрессии вида $\hat{y} = a + bx$. Значение критерия Стьюдента для коэффициента регрессии $t_b = 6{,}55$. Найти коэффициент детерминации и установить степень тесноты связи между переменными. По критерию Фишера оценить статистическую значимость модели. Трудоемкость – 10 (мин/раб) эксперта.

№ 4. Изменения объема продаж магазина y по результатам наблюдений в течение 9 месяцев представлены в таблице

y млн.руб	53	36	28	25	23	24	22	21	22
t мес.	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Подобрать регрессионную модель наилучшим образом соответствующую наблюдениям и посредством индекса детерминации оценить степень тесноты связи между переменными в рамках этой модели. Трудоемкость – 40 (мин/раб) эксперта.

№ 5. В таблице приведены сведения по 12 областям о стоимости минимальной потребительской корзины x тыс. руб. и величине средней заработной платы y тыс. руб.

№ п/п	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
1	7,9	13,4	9,2	14,7	7,5	13,3	6,9	12,4	7,8	13.3
2	9,1	15,4	7,8	13,3	7,8	12,5	8,3	13,3	9,4	13,9
3	7,7	12,8	7,9	12,8	8,1	12,9	9,2	14,6	8,5	14,1
4	8,7	13,8	8,8	15,2	9,3	15,3	9,7	15,3	7,3	12.7
5	8,4	13,3	8,7	13,8	8,6	14,0	8,8	13,8	9,1	15,4
6	7,6	14,4	7,5	12,2	7,7	13,5	9,3	15,9	8,8	14,2
7	8,4	16,0	8,1	14,5	8,3	14,1	7.4	14,5	7,3	12,2
8	9,4	14,9	9,6	14,1	9,4	15,2	7,9	15,2	8,2	13,5
9	7,9	12,5	8,0	12,7	8,8	13,3	10,5	16,8	9,9	14,2
10	9,8	16,3	10,2	15,1	9,9	15,6	9.9	15,4	11,3	16,8
11	8,1	12,0	8,3	12,9	8,0	12,4	8,5	12,7	6,9	12,4
12	11,5	16,2	9,4	14,7	11,2	15,6	9,4	15,5	8,3	13.0

Построить линейное уравнение парной регрессии y от x; вычислить коэффициент парной корреляции и величину средней ошибки аппроксимации; оценить статистическую значимость модели в целом и ее параметров по критериям Фишера и Стьюдента; найти длину доверительного интервала оценок параметров модели. Трудоемкость – 30 (мин/раб) эксперта.

№ 6. В таблице приведены сведения о величине средней заработной платы работников, занятых в различных сферах деятельности x тыс. руб. и величине их потребительских расходов y тыс. руб.

Наименование отрасли	Регион 1		Регион 2		Регион 3		Регион 4	
	x	y	x	y	x	y	x	y
Машиностроение	35,2	26,7	40,2	27,1	38,2	25,2	38,1	29.2
Металлообработка	32,7	25,1	31,9	26,0	35,7	29,1	41,1	32,7
Химическая промышленность	28,1	21,3	30,4	24,9	33,3	25,8	33,2	27,1
Строительство	36,7	29,2	32,9	28,3	38,3	28,5	35,6	28,3
Транспорт	27,2	22,5	25,8	22,1	30,6	24,2	29.0	22,1
Связь	21,0	17,1	24,1	19,3	22,9	18,4	23.9	18,6
Сельское хозяйство	18,3	16,6	17,2	16,0	20.1	17,2	17,5	16,0
Торговля	23,4	17,9	23,5	17,1	22,8	19,2	23,8	19,1
Образование	22,3	15,8	26,6	20,7	24,8	19.1	24,0	20.1
Здравоохранение	17,9	15,3	19,9	17,0	21,0	17,3	23,6	17,4

Для выбранного варианта построить линейную модель парной регрессии и проверить ее статистическую значимость; построить поле корреляции и выяснить можно ли построить нелинейную модель, лучше описывающую результаты наблюдений; построить такую модель и сравнить ее качество с линейной по величине индекса корреляции. Трудоемкость – 50 (мин/раб) эксперта.

1.4. Множественная регрессия и корреляция

Парная регрессия может дать хороший результат при моделировании, если влиянием других факторов, воздействующих на объект исследования, можно пренебречь. Если же этим влиянием пренебречь нельзя, то следует попытаться выявить влияние других факторов, введя их в модель, т.е. построить *уравнение множественной регрессии*

$$y = f\left(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m\right) + \varepsilon,$$

где y – зависимая переменная (результативный признак), x_i – независимые, или объясняющие, переменные (признаки-факторы).

Основная цель множественной регрессии – построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также совокупное их воздействие на моделируемый показатель.

Построение уравнения множественной регрессии начинается со спецификации модели. Эта процедура включает в себя два круга вопросов: *отбор факторов* и *выбор вида уравнения регрессии*. Факторы, включаемые в состав уравнения множественной регрессии, должны отвечать следующим требованиям.

1.Они должны быть *количественно измеримы*. Если необходимо включить в модель качественный фактор, не имеющий количественного измерения, то ему нужно придать количественную определенность.

2.Факторы не должны быть *интеркоррелированы* и тем более находиться в точной функциональной связи.

Включение в модель факторов с высокой интеркорреляцией, может привести к нежелательным последствиям – система нормальных уравнений может оказаться плохо обусловленной, что, как правило, влечет за собой неустойчивость и ненадежность оценок коэффициентов регрессии.

Если между факторами существует высокая корреляция, то определить их изолированное влияние на результативный показатель крайне затруднительно и параметрам уравнения регрессии невозможно дать разумную интерпретацию.

Включаемые в уравнение множественной регрессии факторы должны по возможности полно объяснять вариацию зависимой переменной. Если строится модель с набором m факторов, то для нее рассчитывается показатель детерминации R^2, который фиксирует долю объясненной вариации результативного признака за счет рассматриваемых в регрессии m факторов. Влияние других, не учтенных в модели факторов, оценивается величиной $1-R^2$ с соответствующей остаточной дисперсией S^2.

При дополнительном включении в модель $m+1$ фактора коэффициент детерминации должен значимо возрастать, а остаточная дисперсия уменьшаться:

$R_{m+1}^2 > R_m^2$ и $S_{m+1}^2 < S_m^2$.

Если же этого не происходит, то включаемый в анализ фактор x_{m+1} не улучшает модель и, являясь статистически незначимым, практически оказывается лишним.

Насыщение модели лишними факторами не только не снижает величину остаточной дисперсии и не увеличивает показатель детерминации, но и приводит к статистической незначимости параметров регрессии при проверке по критерию Стьюдента.

Коэффициенты интеркорреляции (т.е. корреляции между объясняющими переменными) позволяют исключать из модели дублирующие факторы. Считается, что две переменные явно *коллинеарны, т.е. находятся между собой в линейной зависимости*, если $r_{x_i x_j} \geq 0{,}7$. В этом случае один из них рекомендуется исключить из модели. Предпочтение при этом отдается не тому фактору, который более тесно связан с результатом, а тому, который при достаточно тесной связи с результатом имеет меньшую тесноту связи с другими факторами. В этом требовании проявляется специфика множественной регрессии как метода исследования комплексного воздействия факторов в условиях их независимости друг от друга.

Пример 3. Пусть при изучении зависимости $y = f(x_1, x_2, x_3)$ матрица парных коэффициентов корреляции оказалась следующей (таблица 6).

Таблица 6

	y	x_1	x_2	x_3
y	1	0,8	0,7	0,6
x_1	0,8	1	0,8	0,5
x_2	0,7	0,8	1	0,2
x_3	0,6	0,5	0,2	1

Очевидно, что факторы x_1 и x_2 дублируют друг друга. Хотя корреляция x_2 с результативным признаком y слабее, чем корреляция фактора x_1 $\left(r_{yx_2} = 0,7 < r_{yx_1} = 0,8\right)$, однако, в то же время Б значительно слабее его корреляция с третьей факторной переменной $r_{x_2x_3} = 0,2 < r_{x_1x_3} = 0,5$. Поэтому в данном случае в уравнение множественной регрессии целесообразно включить факторы x_2, x_3.

По величине парных коэффициентов корреляции обнаруживается лишь явная коллинеарность факторов. Наибольшие трудности в использовании аппарата множественной регрессии возникают при наличии *мультиколлинеарности*, когда более чем два фактора связаны между собой линейной зависимостью, т.е. имеет место совокупное воздействие факторов друг на друга. Наличие мультиколлинеарности факторов может означать, что некоторые факторы будут изменяться только во взаимодействии друг с другом. Это приводит к тому, что выявление влияния каждого фактора в отдельности на результативную переменную становится крайне затруднительным.

Для оценки мультиколлинеарности факторов может использоваться определитель матрицы парных коэффициентов корреляции между факторами.

Если переменные не коррелированы между собой, то матрица парных коэффициентов корреляции между факторами является единичной, поскольку все недиагональные элементы $r_{x_i x_j}$ $(i \neq j)$ в этом случае равны нулю. Так, для уравнения, включающего три объясняющих переменных

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$

матрица коэффициентов корреляции между факторами имела бы определитель, равный единице:

$$\operatorname{Det} \mathbf{R} = \begin{vmatrix} r_{x_1 x_1} & r_{x_1 x_2} & r_{x_1 x_3} \\ r_{x_2 x_1} & r_{x_2 x_2} & r_{x_2 x_3} \\ r_{x_3 x_1} & r_{x_3 x_2} & r_{x_3 x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Если же, наоборот, между факторами существует полная линейная зависимость и все коэффициенты корреляции равны единице, то определитель такой матрицы равен нулю:

$$\operatorname{Det} \mathbf{R} = \begin{vmatrix} r_{x_1 x_1} & r_{x_1 x_2} & r_{x_1 x_3} \\ r_{x_2 x_1} & r_{x_2 x_2} & r_{x_2 x_3} \\ r_{x_3 x_1} & r_{x_3 x_2} & r_{x_3 x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, чем ближе к нулю определитель матрицы межфакторной корреляции, тем сильнее мультиколлинеарность факторов и менее надежны результаты множественной регрессии. И, наоборот, чем ближе к единице определитель матрицы межфакторной корреляции, тем меньше мультиколлинеарность факторов.

Существует ряд подходов преодоления сильной межфакторной корреляции. Самый простой из них , как было упомянуто, состоит в исключении из модели одного или нескольких факторов. Другой подход связан с преобразованием факторов, при котором уменьшается корреляция между ними.

Одним из путей учета внутренней корреляции факторов является переход к совмещенным уравнениям регрессии, т.е. к уравнениям, которые отражают не только влияние факторов, но и их взаимодействие. Так, если $y = f(x_1, x_2, x_3)$, то возможно построение следующего совмещенного уравнения:

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + \varepsilon .$$

Рассматриваемое уравнение учитывает взаимодействие первого порядка (влияние друг на друга двух факторов). Возможно включение в модель и взаимодействий более высокого порядка, если имеются основания полагать их статистическую значимость. Как правило, однако, в практических исследованиях взаимодействия третьего и более высоких порядков оказываются статистически незначимыми.

Отбор факторов, включаемых в регрессионную модель, является одним из важнейших этапов практического использования методов регрессии. Подходы к отбору факторов на основе показателей корреляции могут быть разные, что порождает различные методики построения уравнений множественной регрессии. В зависимости от того, какая методика построения уравнения регрессии принята, меняется алгоритм ее решения на ЭВМ. Наиболее широкое применение получили следующие *методы построения уравнений множественной регрессии*:

1. Метод исключения – отсев факторов из полного набора.
2. Метод включения – дополнительное введение фактора.
3. Шаговый регрессионный анализ – исключение ранее введенного фактора.

При отборе факторов также рекомендуется пользоваться следующим правилом: число включаемых факторов должно быть в 6–7 раз меньше объема наблюдаемой совокупности, по которой строится регрессионная модель. Если это соотношение нарушено, то число степеней свободы остаточной дисперсии будет слишком малым, что приведет к статистической не значимости параметров уравнения регрессии при их проверке по F-критерию.

Ввиду наиболее простой интерпретации параметров самое широкое распространение получила линейная регрессия. В *линейной множественной регрессии* $y_x = a + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_mx_m$ параметры при факторных переменных называются *коэффициентами «чистой»* *регрессии*. Они характеризуют среднее изменение результативного признака с изменением соответствующего фактора на единицу при неизмененном значении других факторов, закрепленных на среднем уровне.

Рассмотрим линейную модель множественной регрессии

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_m x_m + \varepsilon . \qquad (1.15)$$

Классический подход к оцениванию параметров линейной модели множественной регрессии основан на *методе наименьших квадратов*, построение которого подробно рассмотрено в главе 1.1.

Для двухфакторной модели линейной данная система примет вид:

$$\begin{cases} na + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2 = \sum y, \\ a\sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 = \sum yx_1, \\ a\sum x_2 + b_1 \sum x_1 x_2 + b_2 \sum x_2^2 = \sum yx_2. \end{cases}$$

Метод наименьших квадратов применим и к уравнению множественной регрессии в *стандартизированном масштабе*:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + ... + \beta_m t_{x_m} + \varepsilon ,$$

где t_y, t_{x_1}, ..., t_{x_m} – *стандартизированные переменные*: $t_y = \dfrac{y - \overline{y}}{\sigma_y}$, $t_{x_i} = \dfrac{x_i - \overline{x}_i}{\sigma_{x_i}}$, среднее значение которых равно нулю: $\overline{t}_y = \overline{t}_{x_i} = 0$, а среднее квадратичное отклонение равно единице: $\sigma_{t_y} = \sigma_{t_{x_i}} = 1$; β_i – *стандартизированные коэффициенты регрессии*. В силу того, что все переменные заданы как центрированные и нормированные, стандартизованные коэффициенты регрессии β_i можно непосредственно сравнивать между собой, что позволяет ранжировать факторы по степени их воздействия на результат. В этом основное достоинство стандартизованных коэффициентов регрессии в отличие от коэффициентов «чистой» регрессии, непосредственное сравнение которых затруднительно вследствие их различной физической и экономической природы.

Применяя МНК к уравнению множественной регрессии в стандартизированном масштабе, получим систему нормальных уравнений вида

$$\begin{cases} r_{yx_1} = \beta_1 \qquad + \beta_2 r_{x_1x_2} + \beta_3 r_{x_1x_3} + \ldots + \beta_m r_{x_1x_m}, \\ r_{yx_2} = \beta_1 r_{x_1x_2} + \beta_2 \qquad + \beta_3 r_{x_1x_3} + \ldots + \beta_m r_{x_1x_m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{yx_m} = \beta_1 r_{x_1x_m} + \beta_2 r_{x_2x_m} + \beta_3 r_{x_3x_m} + \ldots + \beta_m, \end{cases} \tag{1.16}$$

где r_{yx_i} и $r_{x_ix_j}$ – коэффициенты парной и межфакторной корреляции.

Коэффициенты «чистой» регрессии b_i связаны со стандартизованными коэффициентами регрессии β_i соотношением:

$$b_i = \beta_i \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}}. \tag{1.17}$$

Поэтому можно переходить от уравнения регрессии в стандартизованном масштабе к уравнению регрессии в натуральном масштабе переменных, при этом параметр a определяется как $a = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 - \ldots - b_m\bar{x}_m$.

Стандартизованные коэффициенты регрессии могут быть с успехом использованы для отсева незначимых факторов – из модели исключаются факторы с наименьшими значениями стандартизованных коэффициентов регрессии β_i.

На основе линейного уравнения множественной регрессии

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_mx_m + \varepsilon$$

могут быть найдены *частные уравнения регрессии*:

$$\begin{cases} \hat{y}_{x_1 \cdot x_2, x_3, \ldots, x_m} = f(x_1), \\ \hat{y}_{x_2 \cdot x_1, x_3, \ldots, x_m} = f(x_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{y}_{x_m \cdot x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}} = f(x_m), \end{cases} \tag{1.18}$$

т.е. уравнения регрессии, которые связывают результативный признак с соответствующим фактором x_i при закреплении остальных факторов на среднем уровне. В развернутом виде систему (1.18) как:

$$\begin{cases} y_{x_1 \cdot x_2, x_3, \ldots, x_m} = a + b_1 x_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3 + \ldots + b_m \bar{x}_m + \varepsilon, \\ y_{x_2 \cdot x_1, x_3, \ldots, x_m} = a + b_1 \bar{x}_1 + b_2 x_2 + b_3 \bar{x}_3 + \ldots + b_m \bar{x}_m + \varepsilon, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{x_m \cdot x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}} = a + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3 + \ldots + b_m x_m + \varepsilon. \end{cases}$$

При подстановке в эти уравнения средних значений соответствующих факторов они принимают вид уравнений парной линейной регрессии, т.е.

$$\begin{cases} \hat{y}_{x_1 \cdot x_2, x_3, \ldots, x_m} = A_1 + b_1 x_1, \\ \hat{y}_{x_2 \cdot x_1, x_3, \ldots, x_m} = A_2 + b_2 x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{y}_{x_m \cdot x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}} = A_m + b_m x_m, \end{cases},$$

где

$$\begin{cases} A_1 = a + b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3 + \ldots + b_m \bar{x}_m, \\ A_2 = a + b_1 \bar{x}_1 + b_3 \bar{x}_3 + \ldots + b_m \bar{x}_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_m = a + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3 + \ldots + b_{m-1} \bar{x}_{m-1}. \end{cases}$$

В отличие от парной регрессии частные уравнения регрессии характеризуют изолированное влияние фактора на результат, ибо другие факторы закреплены на неизменном уровне. Эффекты влияния других факторов присоединены в них к свободному члену уравнения множественной регрессии. Это позволяет на основе частных уравнений регрессии определять *частные коэффициенты эластичности*:

$$\acute{Y}_{y_{x_i}} = b_i \cdot \frac{x_i}{y_{x_i \cdot x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m}},$$

где b_i – коэффициент регрессии для фактора x_i в уравнении множественной регрессии, $y_{x_i \cdot x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m}$ – частное уравнение регрессии.

Наряду с частными коэффициентами эластичности могут быть найдены *средние по совокупности показатели эластичности*:

$$\bar{Y}_i = b_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}_{x_i}},$$

которые показывают на сколько процентов в среднем изменится результат, при изменении соответствующего фактора на 1%. Средние показатели эластичности можно сравнивать друг с другом и соответственно ранжировать факторы по силе их воздействия на результат.

Пример 4. Пусть имеются следующие данные (условные) о сменной добыче угля на одного рабочего y (т), мощности пласта x_1 (м) и уровне механизации работ x_2 (%), характеризующие процесс добычи угля в 10 шахтах (таблица 7).

Таблица 7

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	8	11	12	9	8	8	9	9	8	12
x_2	5	8	8	5	7	8	6	4	5	7
y	5	10	10	7	5	6	6	5	6	8

Предполагая, что между переменными y, x_1, x_2 существует линейная корреляционная зависимость, найдем уравнение регрессии y по x_1 и x_2.

Для удобства вычислений, как и в ранее рассмотренных примерах, составляем таблицу (таблица 8).

Таблица 8

№	x_1	x_2	y	x_1^2	x_2^2	y^2	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot y$	$x_2 \cdot y$	y_x	ε^2
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	8	5	5	64	25	25	40	40	25	5,13	0,016
2	11	8	10	121	64	100	88	110	80	8,79	1,464
3	12	8	10	144	64	100	96	120	80	9,64	0,127
4	9	5	7	81	25	49	45	63	35	5,98	1,038
5	8	7	5	64	49	25	56	40	35	5,86	0,741
6	8	8	6	64	64	36	64	48	48	6,23	0,052

7	9	6	6	81	36	36	54	54	36	6,35	0,121
8	9	4	5	81	16	25	36	45	20	5,61	0,377
9	8	5	6	64	25	36	40	48	30	5,13	0,762
10	12	7	8	144	49	64	84	96	56	9,28	1,631
Сумма	94	63	68	908	417	496	603	664	445	68	6,329
Среднее значение	9,4	6,3	6,8	90,8	41,7	49,6	60,3	66,4	44,5	–	–
σ^2	2,44	2,01	3,36	–	–	–	–	–	–	–	–
σ	1,56	1,42	1,83	–	–	–	–	–	–	–	–

Для нахождения параметров уравнения регрессии в данном случае система уравнений (1.3) примет вид:

$$\begin{cases} 10a \quad + 94b_1 \ + 63b_2 = 68, \\ 94a + 908b_1 + 603b_2 = 664, \\ 63a + 603b_1 + 417b_2 = 445. \end{cases}$$

Решив ее найдем, что $a = -3,54$, $b_1 = 0,854$, $b_2 = 0,367$. Таким образом получено следующее уравнение множественной регрессии:

$$y_x = -3,54 + 0,854 \cdot x_1 + 0,367 \cdot x_2 .$$

Оно показывает, что при увеличении только мощности пласта x_1 (при неизменном среднем уровне x_2) на 1 м добыча угля на одного рабочего y увеличится в среднем на 0,854 т, а при увеличении только уровня механизации работ x_2 (при неизменном среднем уровне x_1) на 1% – в среднем на 0,367 т.

Найдем уравнение множественной регрессии в стандартизованном масштабе:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \varepsilon,$$

Стандартизованные коэффициенты регрессии находим по формуле (1.17)

$$\beta_1 = b_1 \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_y} = 0,854 \cdot \frac{1,56}{1,83} = 0,728,$$

$$\beta_2 = b_2 \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_y} = 0,367 \cdot \frac{1,42}{1,83} = 0,285.$$

Таким образом, уравнение регрессии в стандартизованной форме имеет вид:

$$t_y = 0,728 \cdot t_{x_1} + 0,285 \cdot t_{x_2}.$$

Так как стандартизованные коэффициенты регрессии сравнимы между собой, можно утверждать, что мощность пласта оказывает заметно более сильное влияние на сменную добычу угля, чем уровень механизации работ.

Сравнить влияние факторов на результат можно также при помощи средних коэффициентов эластичности

$\bar{Y}_i = b_i \cdot \dfrac{\bar{x}_i}{\bar{y}_{x_i}}$. Отсюда

$$\bar{Y}_1 = 0,854 \cdot \frac{9,4}{6,8} = 1,18,\ \bar{Y}_2 = 0,367 \cdot \frac{6,3}{6,8} = 0,34.$$

Т.е. увеличение только мощности пласта (от своего среднего значения) или только уровня механизации работ на 1% увеличивает в среднем сменную добычу угля на 1,18% или 0,34% соответственно, что подтверждает большее влияние на результативный признак y фактора x_1, нежели фактора x_2.

Показатели качества множественной регрессии

Практическая значимость уравнения множественной регрессии оценивается с помощью показателя множественной корреляции и его квадрата – показателя детерминации.

Показатель множественной корреляции характеризует тесноту связи рассматриваемого набора факторов с исследуемым признаком или, иначе, оценивает тесноту совместного влияния факторов на результат.

Независимо от формы связи показатель множественной корреляции может быть найден по формуле: $R_{yx_1x_2...x_m} = \sqrt{1 - \dfrac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_y}}$, где σ_y^2 – общая дисперсия результативного признака; $\sigma_{ост}^2$ – остаточная дисперсия.

Границы изменения индекса множественной корреляции лежат в пределах от 0 до 1. Чем ближе его значение к 1, тем теснее связь результативного признака со всем набором факторов, входящих в состав регрессионногоуравнения.

При удачном выборе факторов, включенных в регрессионную модель, величина индекса множественной корреляции будет существенно отличаться от индекса корреляции парной зависимости. Если же дополнительно включенные в уравнение множественной регрессии факторы малозначимы, то индекс множественной корреляции будет практически совпадать с индексом парной корреляции, различаясь в третьем, четвертом десятичных знаках. Это дает удобный инструмент для обоснованного отбора факторных переменных, включаемых в уравнение регрессии.

В случае линейной зависимости признаков формула индекса множественной корреляции может быть представлена следующим выражением:

$$R_{yx_1x_2...x_m} = \sqrt{\sum \beta_i \cdot r_{yx_i}},$$

где β_i – стандартизованные коэффициенты регрессии; r_{yx_i} – парные коэффициенты корреляции результативной переменной с каждой из факторных.

Индекс множественной корреляции для линейной регрессии называется также *линейным коэффициентом множественной корреляции*, или *совокупным коэффициентом корреляции*. В этом случае его вычисление возможно через матрицу парных коэффициентов корреляции по формуле

$$R_{yx_1x_2,...,x_m} = \sqrt{1 - \frac{\Delta r}{\Delta r_{11}}}, \qquad (1.19)$$

где

$$\Delta r = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & \dots & r_{yx_m} \\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_m} \\ r_{yx_2} & r_{x_2x_1} & 1 & \dots & r_{x_2x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{yx_m} & r_{x_mx_1} & r_{x_mx_2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

– определитель матрицы парных коэффициентов корреляции;

$$\Delta r_{11} = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_m} \\ r_{x_2x_1} & 1 & \dots & r_{x_2x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_mx_1} & r_{x_mx_2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

– определитель матрицы межфакторной корреляции.

Это соотношение позволяет определять совокупный коэффициент корреляции, не обращаясь к уравнению множественной регрессии, а используя лишь парные коэффициенты корреляции.

В формулах для вычисления коэффициента и индекса множественной корреляции используется остаточная дисперсия, которая имеет систематическую ошибку в сторону уменьшения, тем более значительную, чем больше параметров определяется в уравнении регрессии при заданном объеме наблюдений n. Если число параметров при x_i равно m и приближается к объему наблюдений, то остаточная дисперсия будет близка к нулю и коэффициент (индекс) корреляции приблизится к единице даже при слабой связи факторов с результатом. Для того чтобы не допустить преувеличения оценки тесноты связи, используется *скорректированный индекс (коэффициент) множественной корреляции*, который содержит поправку на число степеней свободы. С этой целью остаточная сумма квадратов $\sum\left(y - y_{x_1x_2\dots x_m}\right)^2$ делится на число степеней свободы остаточной вариации $(n - m - 1)$, а общая сумма квадратов отклонений $\sum\left(y - \bar{y}\right)^2$ на число степеней свободы в целом по совокупности $(n-1)$. Таким образом, формула скорректированного индекса множественной детерминации имеет вид:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\sum (y - \hat{y})^2 \Big/ (n - m - 1)}{\sum (y - \bar{y})^2 \Big/ (n - 1)}, \qquad (1.20)$$

где m – число параметров при переменных x; n – число наблюдений.

Поскольку $\frac{\sum \left(y - y_{x_1 x_2 \dots x_m} \right)^2}{\sum (y - \bar{y})^2} = 1 - R^2$, то величину скорректированного индекса детерминации можно представить в виде:

$$R^2 = 1 - \left(1 - R^2\right) \cdot \frac{n - 1}{n - m - 1}. \qquad (1.21)$$

Из формулы (1.21) видно, что чем больше факторов входит в состав регрессионной модели, тем сильнее различие между R^2 и R^2.

Частные коэффициенты корреляции характеризуют тесноту связи между результативной переменной и соответствующим фактором при элиминировании (устранении влияния) других факторов, включенных в уравнение регрессии. При наличии m факторов в составе линейного уравнения регрессии

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 \dots + b_m x_m + \varepsilon$$

коэффициент частной корреляции, измеряющий влияние на результативный признак y фактора x_i, при фиксированном уровне других факторов, определяется по формуле:

$$r_{y x_i \cdot x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_m} = \sqrt{1 - \frac{1 - R^2_{y x_1 x_2 \dots x_i \dots x_m}}{1 - R^2_{y x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_m}}}, \qquad (1.22)$$

где $R^2_{y x_1 x_2 \dots x_i \dots x_m}$ – множественный коэффициент детерминации всех m факторов; $R^2_{y x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_m}$ – тот же показатель детерминации, но без введения в модель фактора x_i.

При двух факторах расчетное соотношение (1.22) принимает вид:

$$r_{yx_1\cdot x_2}=\sqrt{1-\frac{1-R^2_{yx_1x_2}}{1-r^2_{yx_2}}};\ r_{yx_2\cdot x_1}=\sqrt{1-\frac{1-R^2_{yx_1x_2}}{1-r^2_{yx_1}}}.$$

Порядок частного коэффициента корреляции определяется количеством факторов, влияние которых исключается. Например, $r_{yx_1\cdot x_2}$ – коэффициент частной корреляции первого порядка. Соответственно коэффициенты парной корреляции называются коэффициентами нулевого порядка. Коэффициенты частной корреляции более высоких порядков можно определить через коэффициенты частной корреляции более низких порядков по рекуррентной формуле:

$$r_{yx_i\cdot x_1x_2\ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_m}=\frac{r_{yx_i\cdot x_1x_2\ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_{m-1}}-r_{yx_m\cdot x_1x_2\ldots x_{m-1}}\cdot r_{x_ix_m\cdot x_1x_2\ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_{m-1}}}{\sqrt{\left(1-r^2_{yx_m\cdot x_1x_2\ldots x_{m-1}}\right)\cdot\left(1-r^2_{x_ix_m\cdot x_1x_2\ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_{m-1}}\right)}}. \qquad (1.23)$$

Для двух факторов эта формула принимает вид:

$$r_{yx_1\cdot x_2}=\frac{r_{yx_1}-r_{yx_2}\cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{yx_2}\right)\cdot\left(1-r^2_{x_1x_2}\right)}};\ r_{yx_2\cdot x_1}=\frac{r_{yx_2}-r_{yx_1}\cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{yx_1}\right)\cdot\left(1-r^2_{x_1x_2}\right)}}.$$

Частные коэффициенты корреляции определяют меру тесноты связи каждого фактора с результатом в чистом виде. Если из стандартизованного уравнения регрессии $t_y=\beta_1t_{x_1}+\beta_2t_{x_2}+\beta_3t_{x_3}+\varepsilon$ следует, что $\beta_1>\beta_2>\beta_3$, т.е. по силе влияния на результат порядок факторов таков: x_1, x_2, x_3, то этот же порядок факторов сохраняется и по соотношению частных коэффициентов корреляции, $r_{yx_1\cdot x_2x_3}>r_{yx_2\cdot x_1x_3}>r_{yx_3\cdot x_1x_2}$.

Заметим, что частные коэффициенты корреляции, как правило, не имеют самостоятельного значения. Их используют на стадии формирования модели. Так при построении многофакторной модели на первом этапе определяется уравнение регрессии с полным набором факторов и рассчитывается матрица частных коэффициентов корреляции. На втором этапе отбирается фактор с наименьшей и несущественной по t-критерию Стьюдента величиной показателя частной корреляции. Исключив его из модели, строится новое уравнение регрессии. Процедура продолжается до тех пор, пока не окажется, что все частные коэффициенты корреляции значимо отличны от нуля. Если исключен несущественный фактор, то множественные коэффициенты детерминации на двух смежных шагах построения регрессионной модели почти не отличаются друг от друга, $R_{m+1}^2 \approx R_m^2$, где m – число факторов.

Статистическая значимость уравнения множественной регрессии в целом, так же как и парной регрессии, оценивается с помощью F-критерия Фишера:

$$F = \frac{S_{факт}}{S_{ост}} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m}$$

где $S_{факт}$ – факторная сумма квадратов на одну степень свободы; $S_{ост}$– остаточная сумма квадратов на одну степень свободы; R^2 – коэффициент (индекс) множественной детерминации; m – число параметров при переменных x (в линейной регрессии совпадает с числом включенных в модель факторов); n – число наблюдений.

В ряде случаев в практике построения эконометрических моделей оказывается целесообразным оценить значимость не только уравнения в целом, но и каждого фактора в отдельности, дополнительно включаемого в регрессионную модель. Необходимость такой оценки связана с тем, что не каждый фактор, вошедший в модель, будет существенно увеличивать долю объясненной вариации результативного признака. Кроме того, при наличии в модели нескольких факторов они могут вводиться в модель в разной последовательности. Ввиду корреляции между факторами значимость одного и того же фактора может быть разной в зависимости от последовательности его введения в модель. Мерой для оценки включения фактора в модель служит *частный* F-*критерий*, обозначаемый как F_{x_i}.

Частный F-критерий построен на сравнении прироста факторной дисперсии, обусловленного влиянием дополнительно включенного фактора, с остаточной дисперсией на одну степень свободы по регрессионной модели в целом. В общем виде для фактора x_i частный F-критерий определится как

$$F_{x_i} = \frac{R^2_{yx_1 \dots x_i \dots x_m} - R^2_{yx_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_m}}{1 - R^2_{yx_1 \dots x_i \dots x_m}} \cdot \frac{n - m - 1}{1}, \qquad (1.24)$$

где $R^2_{yx_1 \dots x_i \dots x_m}$ – коэффициент множественной детерминации для модели с полным набором факторов, $R^2_{yx_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_m}$ – тот же показатель, но без включения в модель фактора x_i, n – число наблюдений, m – число параметров в модели (без свободного члена).

Фактическое значение частного F-критерия сравнивается с табличным при уровне значимости α и числе степеней свободы: 1 и $n - m - 1$. Если фактическое значение F_{x_i} превышает $F_{табл.}(\alpha, k_1, k_2)$, то дополнительное включение фактора x_i в модель статистически оправданно и коэффициент чистой регрессии b_i при факторе x_i будет статистически значимым. Если же фактическое значение F_{x_i} меньше табличного, то дополнительное включение в модель фактора x_i не увеличивает сколь-нибудь существенно долю объясненной вариации признака y, следовательно, нецелесообразно его включение в модель, а коэффициент регрессии при данном факторе в этом случае статистически незначим. Для двухфакторного линейного уравнения регрессии формула (1.24) имеет вид:

$$F_{x_1} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - r^2_{yx_2}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot (n - 3), \quad F_{x_2} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - r^2_{yx_1}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot (n - 3).$$

С помощью частного F-критерия можно проверить значимость всех коэффициентов регрессии в предположении, что каждый соответствующий фактор x_i вводился в уравнение множественной регрессии последним, так как $t_{b_i} = \sqrt{F_{x_i}}$.

Оценка значимости коэффициентов чистой регрессии по t-критерию Стьюдента может быть проведена и без расчета частных F-критериев. В этом случае, как и в парной регрессии, для каждого фактора используется формула:

$$t_{b_i} = \frac{b_i}{m_{b_i}},$$

где b_i – коэффициент чистой регрессии при факторе x_i, m_{b_i} – средняя квадратичная (стандартная) ошибка коэффициента регрессии b_i.

Для уравнения множественной регрессии $y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_mx_m$ средняя квадратичная ошибка коэффициента регрессии может быть определена по формуле:

$$m_{b_i} = \frac{\sigma_y \sqrt{1 - R^2_{yx_1...x_m}}}{\sigma_{x_i} \sqrt{1 - R^2_{x_ix_1...x_m}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n - m - 1}}, \qquad (1.25)$$

где σ_y – среднее квадратичное отклонение для результативного признака y, σ_{x_i} – среднее квадратичное отклонение для признака-фактора x_i, $R^2_{yx_1...x_m}$ – коэффициент детерминации для уравнения множественной регрессии, $R^2_{x_ix_1...x_m}$ – коэффициент детерминации для зависимости фактора x_i со всеми другими факторами уравнения множественной регрессии; $n - m - 1$ – число степеней свободы для остаточной суммы квадратов отклонений. Соответствующие коэффициенты детерминации $R^2_{x_ix_1...x_m}$ легко могут быть вычислены, если найдены элементы матрицы межфакторной корреляции.

Взаимосвязь показателей частного коэффициента корреляции, частного критерия Фишера и t-критерия Стьюдента для коэффициентов чистой регрессии может использоваться в процедуре отбора факторов. Отсев факторов при построении уравнения регрессии методом исключения практически можно осуществлять не только по частным коэффициентам корреляции, исключая на каждом шаге фактор с наименьшим незначимым значением частного коэффициента корреляции, но и по величинам t_{b_i} и F_{x_i}. Частный F-критерий широко используется и при построении модели методом включения переменных и шаговым регрессионным методом.

Пример 4. (Продолжение). Оценим качество уравнения регрессии, полученного в предыдущей главе. Сначала найдем значения парных коэффициентов корреляции:

$$r_{yx_1} = \frac{\overline{y \cdot x_1} - \bar{y} \cdot \bar{x}_1}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_1}} = \frac{66,4 - 6,8 \cdot 9,4}{1,83 \cdot 1,56} = 0,869;$$

$$r_{yx_2} = \frac{\overline{y \cdot x_2} - \bar{y} \cdot \bar{x}_2}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{44,5 - 6,8 \cdot 6,3}{1,83 \cdot 1,42} = 0,639;$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{\overline{x_1 \cdot x_2} - \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{60,3 - 9,4 \cdot 6,3}{1,56 \cdot 1,42} = 0,488.$$

Значения парных коэффициентов корреляции указывают на достаточно тесную связь сменной добычи угля на одного рабочего y с мощностью пласта x_1 и на умеренную связь с уровнем механизации работ x_2. В то же время межфакторная связь $r_{x_1x_2}$ не очень сильная ($r_{x_1x_2} = 0,49 < 0,7$), что говорит о том, что оба фактора являются информативными, т.е. и x_1, и x_2 необходимо включить в модель.

Далее рассчитаем совокупный коэффициент корреляции $R_{yx_1x_2}$. Для этого сначала найдем определитель матрицы парных коэффициентов корреляции:

$$\Delta r = \begin{vmatrix} 1 & 0,87 & 0,64 \\ 0,87 & 1 & 0,49 \\ 0,64 & 0,49 & 1 \end{vmatrix} = 0,139064,$$

и определитель матрицы межфакторной корреляции:

$$\Delta r_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0,49 \\ 0,49 & 1 \end{vmatrix} = 0,7599.$$

Отсюда коэффициент множественной корреляции

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\Delta r}{\Delta r_{11}}} = \sqrt{1 - \frac{0,139064}{0,7599}} = 0,904.$$

Это позволяет утверждать что 81,7% (коэффициент детерминации $R^2_{yx_1x_2} = 0,904^2 = 0,817$) вариации результата объясняется вариацией представленных в уравнении признаков, что указывает на весьма тесную связь признаков с результатом. Скорректированный коэффициент множественной детерминации

$$\bar{R}^2 = 1 - \left(1 - R^2\right) \cdot \frac{n-1}{n-m-1} = 1 - \left(1 - 0,817\right) \cdot \frac{10-1}{10-2-1} = 0,765$$

Теперь найдем частные коэффициенты корреляции

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \sqrt{1 - \frac{1 - R^2_{yx_1x_2}}{1 - r^2_{yx_2}}} = \sqrt{1 - \frac{1-0,817}{1-0,408}} = 0,831;$$

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \sqrt{1 - \frac{1 - R^2_{yx_1x_2}}{1 - r^2_{yx_1}}} = \sqrt{1 - \frac{1-0,817}{1-0,755}} = 0,503.$$

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_2}\right) \cdot \left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)}} = \frac{0,869 - 0,639 \cdot 0,488}{\sqrt{\left(1 - 0,489^2\right)\left(1 - 0,639^2\right)}} = 0,830;$$

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_1}\right) \cdot \left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)}} = \frac{0,639 - 0,869 \cdot 0,488}{\sqrt{\left(1 - 0,488^2\right)\left(1 - 0,869^2\right)}} = 0,498.$$

Как и следовало ожидать, фактор x_1 оказывает более сильное влияние на результативный признак, чем x_2.

Оценим надежность уравнения регрессии в целом и показателя связи с помощью F-критерия Фишера. Фактическое значение F-критерия

$$F_{факт} = \frac{R^2}{1-R^2} \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,817}{1-0,817} \frac{10-2-1}{2} = 15,63$$

Табличное значение F-критерия при пятипроцентном уровне значимости ($\alpha = 0,05$, $k_1 = 2$, $k_2 = 10 - 2 - 1 = 7$): $F_{табл.}$= 4,74. Так как $F_{факт}$ = 15,63 > $F_{табл.}$= 4,74 уравнение признается статистически значимым.

Оценим целесообразность включения фактора x_1 после фактора x_2 и x_2 после x_1 с помощью частного критерия Фишера:

$$F_{x_1} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - r^2_{yx_2}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot \left(n - 3\right) = \frac{0,817 - 0,408}{1 - 0,817} \cdot 7 = 15,65;$$

$$F_{x_2}=\frac{R^2_{yx_1x_2}-r^2_{yx_1}}{1-R^2_{yx_1x_2}}\cdot(n-3)=\frac{0,817-0,755}{1-0,817}\cdot 7=2,37\,.$$

Табличное значение частного F-критерия при пятипроцентном уровне значимости ($\alpha=0,05,\ k_1=1,\ k_2=10-2-1=7$): $F_{табл.}=5,59$. Так как $F_{x_1}=15,65>F_{табл.}=5,59$, а $F_{x_2}=2,37<F_{табл..}=5,59$, то включение фактора x_1 в модель статистически оправдано и коэффициент чистой регрессии b_1 статистически значим, а дополнительное включение фактора x_2, после того, как уже введен фактор x_1, нецелесообразно.

Задачи для самостоятельного решения

№7. Известны величины коэффициентов парной корреляции между результативной переменной y и факторными переменными x_1,x_2 $r_{yx_1}=0,85;\ r_{yx_2}=0,94$, а также коэффициент межфакторной корреляции $r_{x_1x_2}=0,8$. Определить частные коэффициенты корреляции по обеим факторным переменным и найти значения частных критериев Фишера в предположении, что регрессионная модель линейна и получена по результатам 16 наблюдений. Трудоемкость – 10 (мин/раб) эксперта.

№8. По материалам 19 предприятий оптовой торговли изучалась зависимость объема реализации товаров y от имеющихся торговых площадей x_1 и виличины товарных запасов x_2. Коэффициент детерминации для зависимости в целом $R^2=0,92$, а коэффициенты парной корреляции $r_{yx_1}=0,95;\ r_{yx_2}=0,,91$. В предположении линейности модели оценить ее статистическую значимость в целом и найти значения частных коэффициентов корреляции $r_{yx_1\cdot x_2}\ ;\ r_{yx_2\cdot x_1}$. Трудоемкость – 30 (мин/раб) эксперта.

№9. По опросам 45 семей изучалось потребление мяса y *кг* от величины дохода x_1 *руб.* и потребления хлебобулочных изделий x_2 *кг*. По результатам наблюдений было получено уравнение регрессии $\hat{y}=-167+0,22x_1-0,385x_2$. Стандартные ошибки коэффициентов регрессии оказались равны $m_{b_1} = 001; m_{b_2} = 0{,}24$. Множественный коэффициент корреляции $R = 0{,}86$. Оценить статистическую значимость модели в целом и с помощью частных критериев Фишера выяснить целесообразность включения в состав модели каждого фактора в отдельности. Трудоемкость – 20 (мин/раб) эксперта.

№10. По 26 предприятиям отрасли изучалась зависимость потребления сырья y т. от энерговооруженности x_1 кВт.ч/ед. продукции и объема производства x_2. По результатам наблюдений были вычислены

$$\bar{y} = 12;\ \bar{x}_1 = 4{,}2;\ \bar{x}_2 = 10{,}1;\ \sigma_y = 2{,}1;\ \sigma_{x_1} = 0{,}5;\ \sigma_{x_2} = 1{,}8;$$
$$r_{yx_1} = 0{,}54;\ r_{yx_2} = 0{,}84;\ r_{x_1x_2} = 0{,}42.$$

Оценить статистическую значимость линейной модели в целом; вычислить коэффициенты модели и коэффициенты эластичности по обоим факторам. Трудоемкость – 30 (мин/раб) эксперта.

№11. По 28 родственным предприятиям изучалась зависимость прибыли y от производительности труда x_1 и стоимости единицы продукции x_2. По результатам наблюдений были вычислены $\bar{y} = 252;\ \bar{x}_1 = 46{,}5;\ \bar{x}_2 = 113;\ \sigma_y = 39;\ \sigma_{x_1} = 11{,}8;\ \sigma_{x_2} = 21$. А также коэффициенты парной корреляции $r_{yx_1} = 0{,}69;\ r_{yx_2} = 0{,}61;\ r_{x_1x_2} = 0{,}44$. Построить линейное регрессионное уравнение в натуральной и стандартизованной форме; оценить его статистическую значимость и целесообразность включения каждого из факторов в состав модели. Трудоемкость – 40 (мин/раб) эксперта.

№12. По результатам обследования 30 предприятий отрасли получены данные о потреблении электроэнергии y тыс. квт.ч в зависимости от объемов производства x_1 и уровня автоматизации x_2 %. По данным наблюдений были вычислены:

$$\bar{y} = 1020;\ \bar{x}_1 = 420;\ \bar{x}_2 = 39{,}7;$$

$$\sigma_y = 27{,}2;\ \sigma_{x_1} = 44{,}8;\ \sigma_{x_2} = 18{,}1;\ r_{yx_1} = 0{,}78;\ r_{yx_2} = 0{,}44;\ r_{x_1x_2} = 0{,}38$$

Построить линейное регрессионное уравнение в натуральной и стандартизованной форме; оценить его статистическую значимость и целесообразность включения каждого из факторов в состав модели. Трудоемкость – 40 (мин/раб) эксперта.

№13. По данным 32 наблюдений были получены $\bar{y}=210;\ \bar{x}_1=140;\ \bar{x}_2=18;\ \bar{x}_3=90;\ R^2=0{,}69$ и построена регрессионная зависимость: $\hat{y}=a+0{,}184x_1+0{,}058x_2-6{,}35x_3$. Найти величину скорректированного коэффициента корреляции и оценить статистическую значимость уравнения регрессии в целом; оценить величину свободного члена; вычислить коэффициенты эластичности по каждой из факторных переменных модели. Трудоемкость – 10 (мин/раб) эксперта. Трудоемкость – 15 (мин/раб) эксперта.

№14. По данным 25 наблюдений были получены $\bar{y}=35;\ \bar{x}_1=16;\ \bar{x}_2=8{,}5;\ \sigma_y=7{,}1;\ \sigma_{x_1}=4{,}8;\ \sigma_{x_2}=0{,}9;\ r_{x_1x_2}=-0{,}35$ и построена линейная регрессионная модель $\hat{y}=20{,}3+x_1-2{,}1x_2$. Оценить статистическую значимость коэффициентов регрессии; найти показатели частной корреляции и коэффициенты эластичности по каждому фактору. Трудоемкость – 40 (мин/раб) эксперта.

№15. По данным 23 наблюдений были получены $\bar{y}=23;\ \bar{x}_1=6{,}5;\ \bar{x}_2=8{,}3;\ \sigma_y=4{,}6;\ \sigma_{x_1}=2{,}6;\ \sigma_{x_2}=0{,}8;\ r_{x_1x_2}=0{,}52$ и построена линейная регрессионная модель $\hat{y}=19{,}8-1{,}9x_1-0{,}6x_2$. Оценить статистическую значимость коэффициентов регрессии; найти показатели частной корреляции и коэффициенты эластичности по каждому фактору. Трудоемкость – 40 (мин/раб) эксперта.

Указание. В задачах №14 и №15 перейти к стандартизованной форме модели и, воспользовавшись системой (1.16), найти коэффициенты частной корреляции.

№16. В таблице представлены сведения, собранные по 20 предприятиям отрасли о производительности труда y тыс. руб.; обновляемости основных фондов x_1 % и доле работников, имеющих непрерывный стаж более 10 лет x_2%.

№ п/п	y	x_1	x_2	№ п/п	y	x_1	x_2
1	7	3,5	9	11	10	6,3	22
2	7	3,6	10	12	10	6,5	22
3	7	3,9	12	13	11	7,2	24
4	7	4,1	17	14	12	7,5	25
5	8	4,2	18	15	12	7,9	27
6	8	4,5	19	16	13	8,2	30
7	9	5,3	19	17	13	8,4	31
8	9	5,5	20	18	14	8,6	33
9	10	5,6	21	19	14	9,5	35
10	10	6,1	21	20	15	9,6	36

Построить линейную регрессионную модель и оценить ее статистическую значимость в целом. Получить коэффициенты стандартизованной формы модели; по их величинам сделать вывод о о степени влияния факторных переменных на варьирование результативного признака. Вычислить стандартные ошибки коэффициентов регрессии и сделать заключение об их статистической значимости. Найти частные коэффициенты корреляции; выяснить целесообразность включения каждой из факторных переменных в состав регрессионной модели. Вычислить значение скорректированного индекса множественной детерминации. Трудоемкость – 60 (мин/раб) эксперта.

1.5. Нарушение предпосылок регрессионного анализа. Обобщенный метод наименьших квадратов

Статистическая проверка параметров регрессии и показателей корреляции основаны на некоторых *a priori* принимаемых гипотезах относительно распределения случайной составляющей ε_i. Естественно, что до их проверки все решения, принятые на основании презумпции истинности этих гипотез, носят лишь предварительный характер. После построения уравнения регрессии проводится проверка наличия у оценок ε_i (случайных остатков) тех свойств, которые предполагались. Связано это с тем, что поскольку оценки параметров регрессии используются в процессе выработки управленческих решений, они должны отвечать определенным критериям. А именно они должны быть несмещенными, состоятельными и эффективными. Эти свойства оценок, полученных с помощью МНК, имеют чрезвычайно важное практическое значение в использовании результатов регрессии и корреляции.

Несмещенность оценки означает, что математическое ожидание остатков равно нулю. Если оценки обладают свойством несмещенности, то их можно сравнивать по результатам разных независимых исследований.

Оценки считаются *эффективными*, если они характеризуются наименьшей дисперсией. В практических исследованиях это означает возможность перехода от точечного оценивания к интервальному.

Состоятельность оценок характеризует увеличение их точности с увеличением объема выборки.

Указанные критерии оценок (несмещенность, состоятельность и эффективность) обязательно учитываются при разных способах оценивания. В методе наименьших квадратов оценки регрессии строятся на основе минимизации суммы квадратов остатков. Поэтому очень важно исследовать поведение остаточных величин регрессии ε_i. Условия, необходимые для получения несмещенных, состоятельных и эффективных оценок, и представляют собой предпосылки МНК, соблюдение которых обязательно для получения достоверных результатов эконометрического моделирования.

Исследования остатков ε_i предполагают проверку наличия следующих пяти предпосылок МНК:

1)случайный характер остатков;

2)нулевая средняя величина остатков, не зависящая от x_i;

3)гомоскедастичность – дисперсия каждого отклонения ε_i, одинакова для всех значений факторных переменных;

4)отсутствие автокорреляции остатков – значения остатков ε_i распределены независимо друг от друга;

5)остатки, как случайные величины, имеют нормальное распределение.

Прежде всего, проверяется случайный характер остатков ε_i – первая предпосылка МНК. С этой целью стоится график зависимости остатков ε_i от теоретических значений результативного признака (рис. 3). Если на графике множество точек образует горизонтальную полосу, то остатки ε_i представляют собой случайные величины и первая предпосылка МНК считается выполненной.

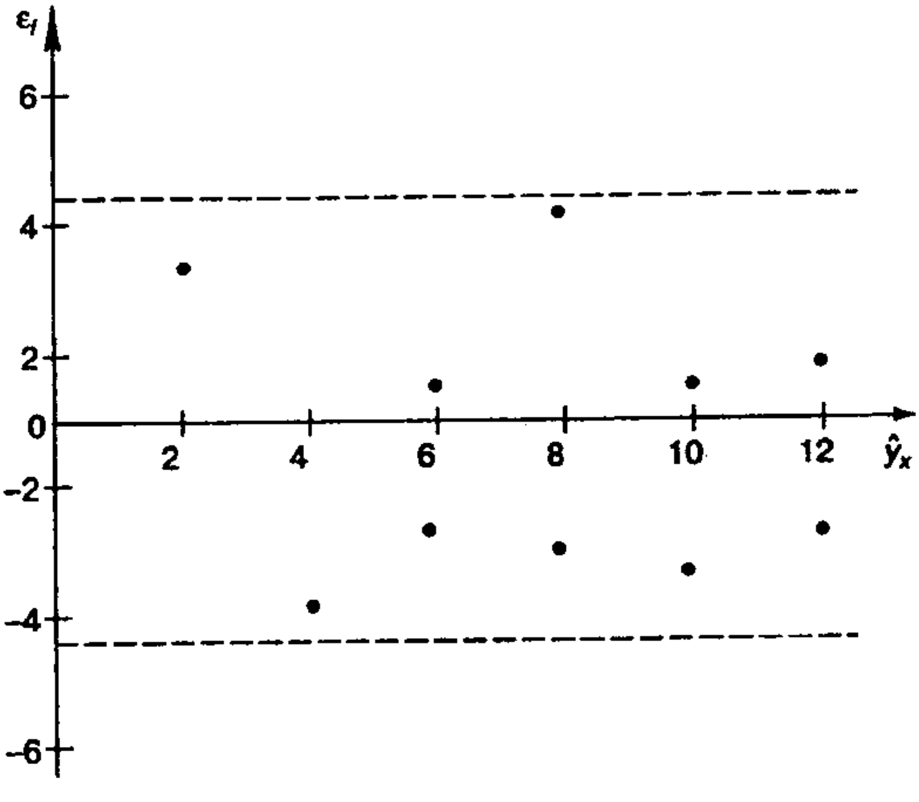


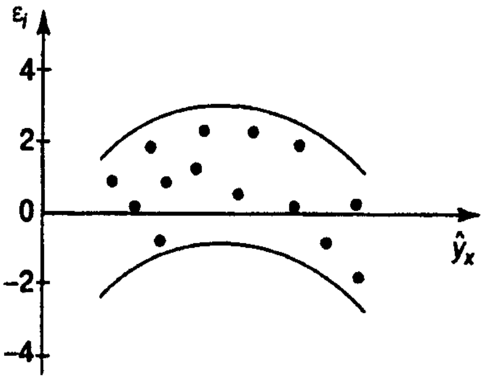
Рис. 3. Зависимость случайных остатков ε_i от теоретических значений y_x

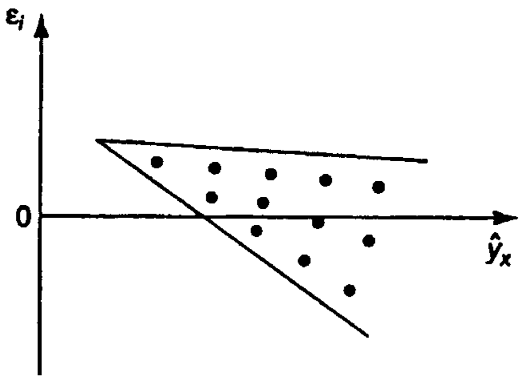
Возможны, однако, и другие ситуации.

1) остатки ε_i не случайны (рис. 4а);

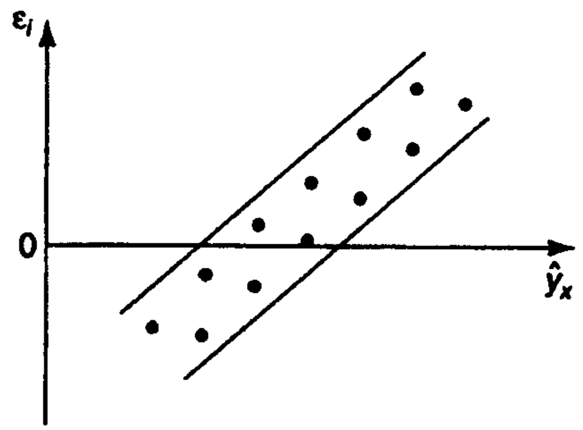
2) остатки ε_i не имеют постоянной дисперсии (рис. 4б);

3) остатки ε_i носят систематический характер (рис. 4в).





4а **4б**



4в

Рис. 4. Зависимость случайных остатков ε_i от теоретических значений y_x

В этих случаях необходимо либо изменять спецификацию модели, либо вводить дополнительную информацию и строить уравнение регрессии заново.

Вторая предпосылка МНК относительно нулевой средней величины остатков означает, что $\sum\left(y - y_x\right) = 0$. Это, как правило, выполняется для линейных моделей и моделей, нелинейных относительно включаемых переменных.

Вместе с тем, несмещенность оценок коэффициентов регрессии, полученных с помощью МНК, зависит от того, будут ли величины случайных остатков независимы от факторных переменных, что также исследуется в рамках проверки второй предпосылки МНК. С этой целью строится график зависимости случайных остатков ε_i от факторов, включенных в регрессию x_j (рис.5).

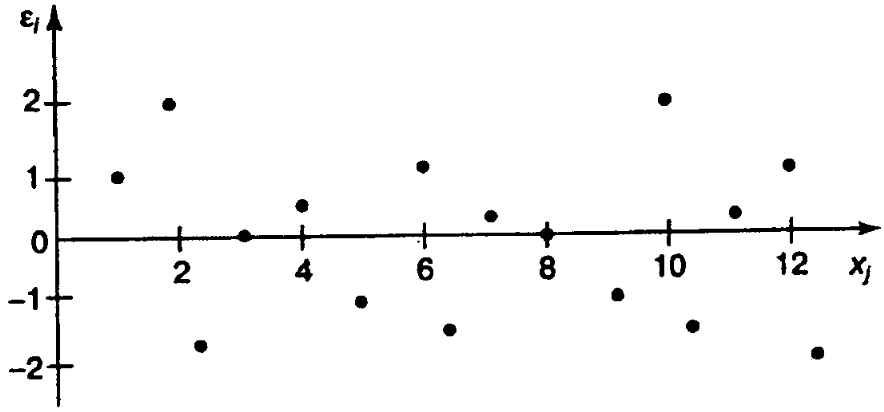


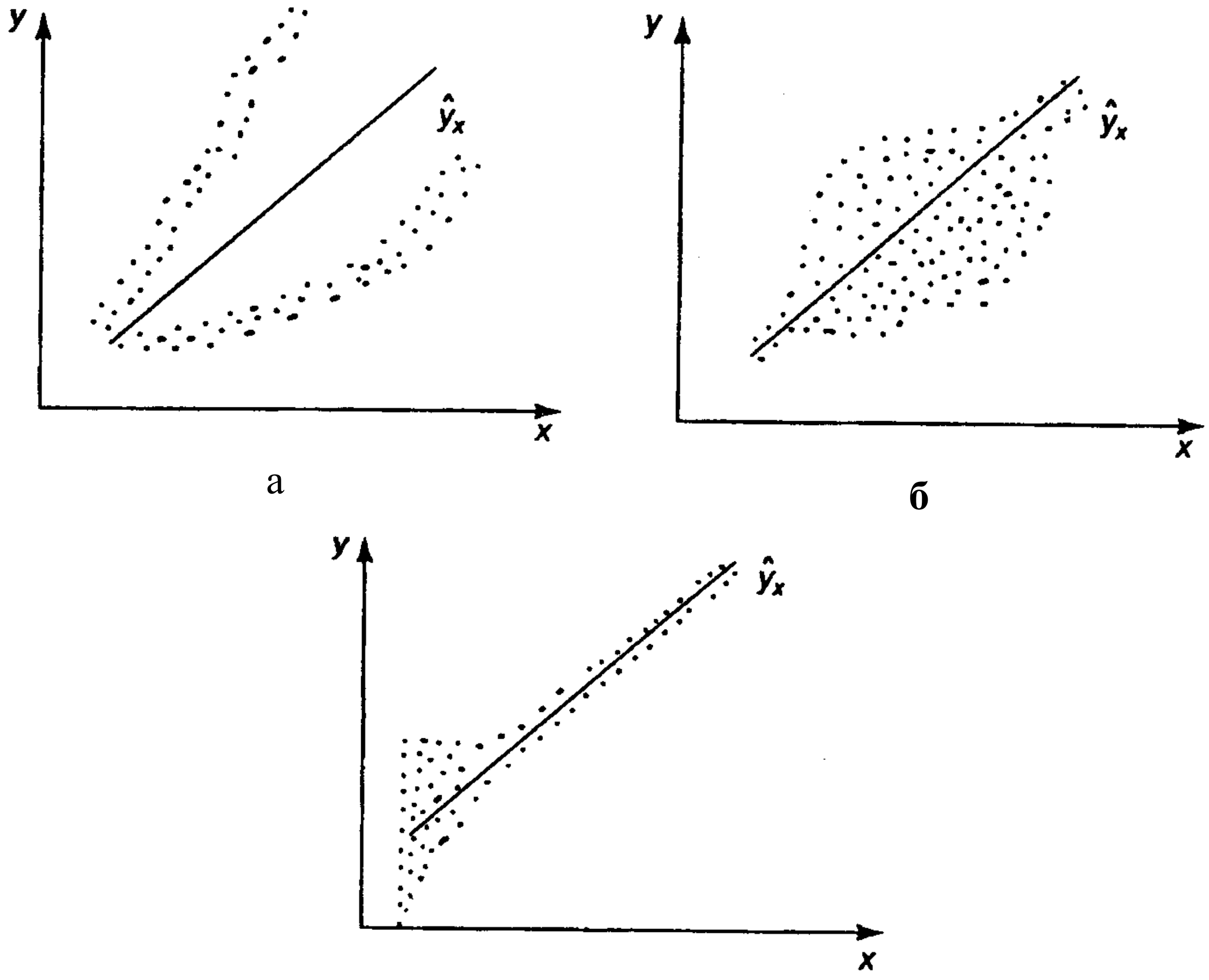
Рис. 5. Зависимость величины остатков от величины фактора x_j

Если точки на графике расположены в виде горизонтальной полосы, то вторая предпосылка МНК считается выполненной. Если же график показывает наличие зависимости ε_i и x_j, то следует так же задуматься об изменении спецификации модели, или заняться поиском источника систематической погрешности.

Предпосылка о нормальном распределении остатков позволяет проводить проверку параметров регрессии и корреляции с помощью F- и t-критериев. Вместе с тем, оценки регрессии, найденные с применением МНК, обладают хорошими свойствами даже при отсутствии нормального распределения остатков, т.е. в случае нарушении пятой предпосылки МНК.

Совершенно необходимым для получения посредством МНК состоятельных оценок параметров регрессии является соблюдение третьей и четвертой предпосылок.

В соответствии с третьей предпосылкой МНК требуется, чтобы дисперсия остатков была *гомоскедастичной*. Это значит, что для каждого значения фактора x_j остатки ε_i имеют примерно одинаковую дисперсию. Если это условие применения МНК не соблюдается, то имеет место *гетероскедастичность*. Наличие гетероскедастичности можно наглядно видеть из поля корреляции (рис. 6).



а

б

в

Рис. 6. Примеры гетероскедастичности

На рис. 6 визуализированы ситуации, когда: а – дисперсия остатков растет по мере увеличения x; б – дисперсия остатков достигает максимальной величины в области средних значениях переменной x и уменьшается при минимальных и максимальных значениях x; в – максимальная дисперсия остатков наблюдается при малых значениях переменной x.

Наличие гомоскедастичности или гетероскедастичности можно проиллюстрировать графиком зависимости остатков ε_i от теоретических значений результативного признака y_x (рис.7-9).

Для множественной регрессии данный вид графиков является наиболее приемлемым визуальным способом обнаружения гомо- и гетероскедастичности.

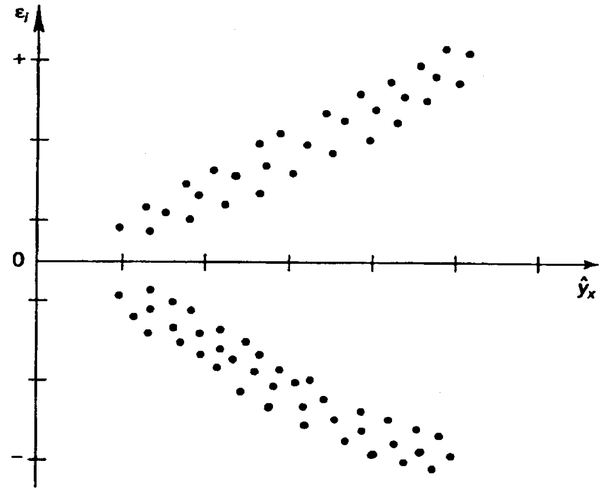


Рис. 7. Гетероскедастичность: большая дисперсия ε_i для больших значений y_x.

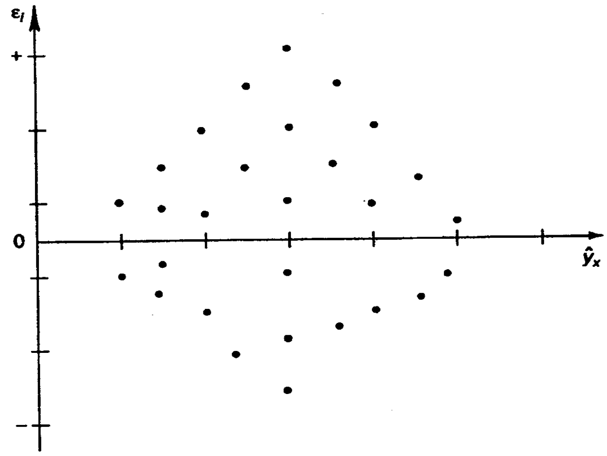


Рис 8. Гетероскедастичность, соответствующая полю корреляции рис. 6б.

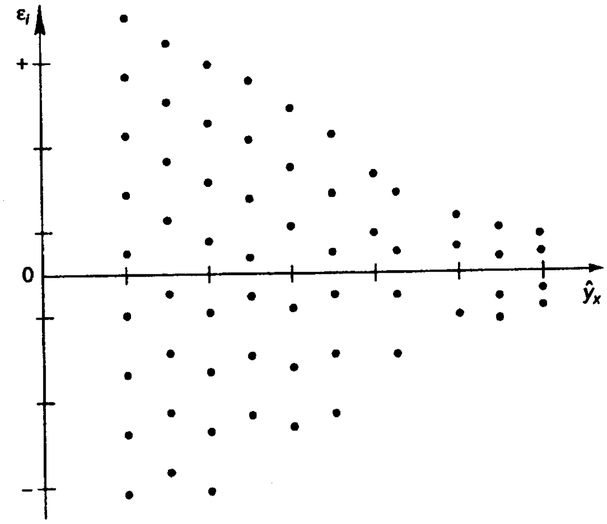


Рис. 9. Гетероскедастичность, соответствующая полю корреляции рис. 6в

При построении регрессионных моделей чрезвычайно важно соблюдение четвертой предпосылки МНК – отсутствие автокорреляции остатков, что означает статистически незначимую корреляцию между остатками текущих и предыдущих (последующих) наблюдений. Коэффициент корреляции между ε_i и ε_j, где ε_i – остатки текущих наблюдений, ε_j – остатки предыдущих наблюдений (например, $j = i - 1$), может быть определен как

$$r_{\varepsilon_i \varepsilon_j} = \frac{\operatorname{cov}\left(\varepsilon_i,\ \varepsilon_j\right)}{\sigma_{\varepsilon_i} \cdot \sigma_{\varepsilon_j}},$$

т.е. по обычной формуле для линейного коэффициента корреляции. Если этот коэффициент окажется значимо отличным от нуля, то остатки признаются автокоррелироваными

Отсутствие автокорреляции остаточных величин обеспечивает состоятельность и эффективность оценок коэффициентов регрессии. Особенно актуально соблюдение данной предпосылки МНК при построении регрессионных моделей по рядам динамики, где ввиду наличия тенденции последующие уровни динамического ряда, как правило, зависят от своих предыдущих уровней.

При нарушении гомоскедастичности и наличии автокорреляции ошибок рекомендуется традиционный метод наименьших квадратов заменять *обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК)*. Рассмотрим, что из себя представляет ОМНК, и как с его помощью проблема гетероскедастичности может быть преодолена.

Как и раньше, будем предполагать, что среднее значение остаточных величин равно нулю, но при этом дисперсия их не остается неизменной для разных значений фактора, а пропорциональна некоторой величине K_i, т.е.

$$\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sigma^2 \cdot K_i,$$

где $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ – дисперсия ошибки при конкретном i-м значении фактора; σ^2 – постоянная дисперсия ошибки при соблюдении предпосылки о гомоскедастичности остатков; K_i – коэффициент пропорциональности, меняющийся с изменением величины фактора, что и обусловливает неоднородность дисперсии. При этом предполагается, что значение σ^2 неизвестно, а в отношении величин K_i выдвигаются определенные гипотезы, характеризующие структуру гетероскедастичности, (см. рис. 7 – 9)

Рассмотрим модель парной линейной регрессии $y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$. При $\sigma^2_{\varepsilon_i} = \sigma^2 \cdot K_i$ модель примет вид: $y_i = a + bx_i + \sqrt{K_i}\varepsilon_i$. В ней остаточные величины гетероскедастичны. Предполагая в них отсутствие автокорреляции, можно перейти к уравнению с гомоскедастичными остатками, поделив все переменные, зафиксированные в ходе i-го наблюдения, на $\sqrt{K_i}$. Тогда дисперсия остатков будет величиной постоянной, т. е. $\sigma^2_{\varepsilon_i} = \sigma^2$.

Иными словами, от регрессии y по переменной x перейдем к регрессии для новых переменных: $y/\sqrt{K}$ и $x/\sqrt{K}$. Уравнение регрессии при этом будет:

$$\frac{y_i}{\sqrt{K_i}} = \frac{a}{\sqrt{K_i}} + b \cdot \frac{x_i}{\sqrt{K_i}} + \varepsilon_i, \tag{1.26}$$

а исходные данные, используемые в расчетной схеме МНК, для получения оценок параметров регрессионной модели, будут иметь вид:

$$y = \begin{vmatrix} \dfrac{y_1}{\sqrt{K_1}} \\ \dfrac{y_2}{\sqrt{K_2}} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{y_n}{\sqrt{K_n}} \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{\sqrt{K_1}} \\ \dfrac{x_2}{\sqrt{K_2}} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{x_n}{\sqrt{K_n}} \end{vmatrix}.$$

По отношению к обычной регрессии уравнение с новыми, преобразованными переменными представляет собой взвешенную регрессию, в которой переменные y и x взяты с весовыми коэффициентами $1/\sqrt{K}$. Оценка параметров нового уравнения с преобразованными переменными приводит к взвешенному методу наименьших квадратов, в котором минимизируется сумма квадратов отклонений вида

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{K_i}(y_i-a-bx_i)^2.$$

что позволяет получить для расчета параметров модели систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases}\sum\frac{y}{K}=a\cdot\sum\frac{1}{K}+b\cdot\sum\frac{x}{K},\\ \sum\frac{y\cdot x}{K}=a\cdot\sum\frac{x}{K}+b\cdot\sum\frac{x^2}{K}.\end{cases}$$

Полученные результаты можно легко распространить на уравнения множественной регрессии.

В эконометрических исследованиях довольно часто выдвигается (и находит подтверждение) гипотеза о том, что остатки ε_i пропорциональны значениям какой либо факторной переменной. Так, если предположить, что в уравнении

$$y=a+b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_mx_m+e$$

$e=\varepsilon\cdot x_1$, т.е. $K=x_1$ и $\sigma^2_{\varepsilon_i}=\sigma^2\cdot x_1$, то в обобщенном МНК будет производиться оценка параметров следующего трансформированного уравнения:

$$\frac{y}{x_1}=b_1+b_2\frac{x_2}{x_1}+\ldots+b_m\frac{x_m}{x_1}+\varepsilon.$$

Применение в этом случае обобщенного МНК приводит к тому, что наблюдения с меньшими значениями преобразованных переменных x/K имеют при определении параметров регрессии относительно больший вес, чем с исходными переменными. Вместе с тем, следует иметь в виду, что преобразованные переменные получают новое экономическое содержание и их регрессия имеет иной смысл, чем регрессия по исходным данным.

Пример 5. Пусть y – издержки производства, x_1 – объем производства продукции, x_2 – основные производственные фонды, x_3 – численность работников. Тогда уравнение

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + e$$

является моделью издержек производства с объемными факторами. Предполагая, что $\sigma^2_{\varepsilon_i}$ пропорциональна квадрату численности работников x_3, мы получим в качестве результативного признака затраты на одного работника y/x_3, а в качестве факторов следующие показатели: производительность труда x_1/x_3 и фондовооруженность труда x_2/x_3. Соответственно трансформированная модель примет вид

$$\frac{y}{x_3} = b_3 + b_1 \frac{x_1}{x_3} + b_2 \frac{x_2}{x_3} + \varepsilon,$$

где параметры b_1, b_2, b_3 не будут совпадать с аналогичными параметрами предыдущей модели. Кроме того, коэффициенты регрессии приобретают иное экономическое содержание. Из показателей силы связи, характеризующих среднее абсолютное изменение издержек производства с изменением абсолютной величины соответствующего фактора на единицу, они становятся показателем среднего изменения затрат на единицу рабочей силы с изменением производительности труда и фондовооруженности на единицу

Если предположить, что в модели с исходными переменными дисперсия остатков пропорциональна квадрату объема продукции, $\sigma^2_{\varepsilon_i} = \sigma^2 \cdot x_1^2$, можно перейти к уравнению регрессии вида

$$\frac{y}{x_1} = b_1 + b_2 \frac{x_2}{x_1} + b_3 \frac{x_3}{x_1} + \varepsilon,$$

в котором новые переменные: y/x_1 – затраты на единицу (или на 1 руб. продукции), x_2/x_1 – фондоемкость продукции, x_3/x_1 – трудоемкость продукции.

Гипотеза о пропорциональности остатков величине фактора может иметь реальное основание: при обработке недостаточно однородной совокупности, включающей как крупные, так и мелкие предприятия, где большим объемным значениям фактора может соответствовать большая дисперсия результативного признака и большая дисперсия остаточных величин.

При наличии одной объясняющей переменной гипотеза $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sigma^2 x^2$ трансформирует линейное уравнение

$$y = a + bx + e$$

в уравнение

$$\frac{y}{x} = b + \frac{a}{x} + \varepsilon,$$

в котором параметры a и b поменялись местами, константа стала коэффициентом наклона линии регрессии, а коэффициент регрессии – свободным членом.

*Пример 6***.** При исследовании зависимости сбережений y от дохода x, было получено линейное уравнение регрессии

$$y = -1{,}081 + 0{,}1178 \cdot x.$$

Применением обобщенного МНК к данной модели в предположении, что ошибки пропорциональны доходу, было получено уравнение для преобразованных данных:

$$\frac{y}{x} = 0{,}1026 - 0{,}8538 \cdot \frac{1}{x}.$$

Коэффициент регрессии первого уравнения сравнивают со свободным членом второго уравнения, т.е. 0,1178 и 0,1026 – оценки параметра b зависимости сбережений от дохода.

Переход к относительным величинам существенно снижает вариацию фактора и соответственно уменьшает дисперсию ошибки. Он представляет собой наиболее простой способ учета гетероскедастичности в регрессионных моделях с помощью обобщенного МНК. Процесс перехода к относительным величинам может быть осложнен выдвижением иных гипотез о пропорциональности ошибок относительно включенных в модель факторов. Использование той или иной гипотезы предполагает проведение специальных исследований остаточных величин для соответствующих регрессионных моделей.

1.6. Регрессионные модели с переменной структурой

В ряде случаев при проведении эконометрических исследований оказывается необходимым учесть в составе регрессионной модели такие факторные переменные, которые в принципе невозможно количественно измерить в общепринятом смысле. Это могут быть разного рода атрибутивные признаки, такие, например, как профессия, пол, образование, климатические условия, принадлежность к определенному региону. Чтобы ввести такие переменные в регрессионную модель, им должны быть присвоены те или иные *числовые метки,* что позволяет формально осуществить преобразование качественных переменных в количественные. Сконструированные таким образом переменные в эконометрике принято называть *фиктивными переменными,* а регрессионные модели, в составе которых имеются подобные переменные, носят название *моделей с переменной структурой.*

Рассмотрим использование фиктивных переменных на примере изучения функции спроса. Предположим, что по группе лиц мужского и женского пола изучается линейная зависимость потребления кофе от цены. В общем виде для всей совокупности обследуемых потребителей уравнение регрессии имеет вид:

$$y = a + bx + \varepsilon,$$

где y – количество потребляемого кофе; x – цена.

Аналогичные уравнения могут быть найдены отдельно для лиц мужского пола: $y_1 = a_1 + b_1 x_1 + \varepsilon_1$ и женского пола: $y_2 = a_2 + b_2 x_2 + \varepsilon_2$.

Различия в потреблении кофе мужчинами и женщинами проявятся в различии средних $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$. Однако, сила влияния цены x на величину потребления y может оказаться примерно одинаковой, т.е. $b \approx b_1 \approx b_2$. В этом случае целесообразно построение общего уравнения регрессии с включением в него фактора «пол» в качестве фиктивной переменной.

Введем в состав модели дихотомическую переменную z, которая принимает значение 0 для потребителей женского пола и значение 1 для обследуемых мужского пола. Используя организованные таким образом данные, с помощью МНК определим параметры линейной двухфакторной модели $\hat{y} = A + A_1 z + bx$, где z, как было упомянуто, принимает значения 1 для мужчин и 0 для женщин.

Поэтому расчетные значения размера потребления кофе для мужчин будут получены из уравнения

$$y = A + A_1 + bx,$$

для женщин же соответствующие значения получим из уравнения

$$y = A + bx.$$

Сопоставление этих уравнений, показывает, что различия в уровне потребления мужчин и женщин состоят в различии свободных членов данных уравнений: A – для женщин и $A + A_1$ – для мужчин.

Число фиктивных переменных в составе модели возрастает по мере увеличения количества уровней, которые может принимать атрибутивная переменная. На технике построения моделей с переменной структурой это, однако, никак не отражается.

Пример 7. При исследовании зависимости цены на двухкомнатную квартиру в областном городе от ее полезной площади было принято решение учесть влияние типа дома, где расположена квартира. Различались три категории домов: «хрущевка», панельный и кирпичный. Для построения регрессионной модели были использованы две фиктивные переменные z_1 и z_2. Переменная z_1 принимает значение 1 для панельного дома и 0 для всех остальных типов домов; переменная z_2 принимает значение 1 для кирпичных домов и 0 для остальных; тогда переменные z_1 и z_2 принимают значения 0 для домов типа «хрущевки». Расчеты, выполненные по имеющимся данным, привели к регрессионной модели вида

$y = 320 + 500x + 2200z_1 + 1600z_2$.

Частные уравнения регрессии для отдельных типов домов, свидетельствуя о наиболее высоких ценах квартир в панельных домах, будут иметь следующий вид: «хрущевки» – $y = 320 + 500x$; панельные – $y = 2520 + 500x$; кирпичные – $y = 1920 + 500x$.

Параметры при фиктивных переменных z_1 и z_2 представляют собой разность между средним уровнем результативного признака для соответствующей группы и базовой группы. В рассматриваемом примере за базу сравнения взяты цены на дома «хрущевки», для которых $z_1 = z_2 = 0$. Параметр при z_1, равный 2200, означает, что при одной и той же полезной площади квартиры цена ее в панельных домах в среднем на 2200 долл. США выше, чем в «хрущевках». Соответственно параметр при z_2 показывает, что в кирпичных домах цена выше в среднем на 1600 долл. при неизменной величине полезной площади.

Кроме моделей, где фиктивные переменные, в которых выступают в роли факторов, может возникнуть необходимость построения модели, в которой дихотомический признак играет роль результата. Подобного вида модели применяются, например, при обработке данных социологических опросов. В качестве зависимой переменной y рассматриваются ответы на вопросы, данные в альтернативной форме: «да» или «нет»; «за» или «против»; «суверенитет» или «автономия». Поэтому зависимая переменная имеет два значения: 1, когда имеет место ответ «да», и 0 – во всех остальных случаях. Модель такой зависимой переменной имеет вид:

$y = a + b_1x_1 + ... + b_mx_m + \varepsilon$.

Модель является вероятностной линейной моделью. В ней y принимает значения 1 и 0, которым соответствуют вероятности p и $1-p$. Поэтому при решении модели находят оценку условной вероятности события y при фиксированных значениях x. Такого рода модели используют при работе с неколичественными переменными. Как правило, это модели выбора из заданного списка альтернатив. Зависимая переменная y представлена дискретными значениями (набор альтернатив), объясняющие переменные x_j – характеристики альтернатив (время, цена), z_j – характеристики индивидов (возраст, доход, уровень образования). Модель такого рода позволяет предсказать долю индивидов в генеральной совокупности, которые выбирают данную альтернативу.

1.7. Системы эконометрических уравнений

При использовании отдельных уравнений регрессии в большинстве случаев предполагается, что аргументы (факторы) можно изменять независимо друг от друга. Однако это предположение не всегда оправдано. Практически изменение одной переменной, как правило, не может происходить при абсолютной неизменности других, а влечет за собой изменения во всей системе взаимосвязанных признаков. Поэтому отдельно взятое уравнение множественной регрессии, как бы удачно не была выбрана его спецификация, отнюдь не всегда может характеризовать истинные влияния отдельных признаков на вариацию результативной переменной. По этой причине в последние десятилетия в экономических исследованиях важное место заняла проблема описания структуры связей между переменными системой, так называемых, одновременных уравнений, называемых также структурными уравнениями.

Системы уравнений в эконометрических исследованиях могут быть построены по-разному.

Возможна *система независимых уравнений,* где каждая зависимая переменная y рассматривается как функция одного и того же набора факторов x:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + \varepsilon_1, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + \varepsilon_m. \end{cases} \tag{1.27}$$

Каждое уравнение такой системы может рассматриваться самостоятельно и для нахождения его параметров используется метод наименьших квадратов без каких либо видоизменений, при условии гомоскедастичности остатков.

Если зависимая переменная y одного уравнения выступает в роли фактора во всех последующих, то исследователь может строить модель в виде *системы рекурсивных уравнений:*

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \varepsilon_2, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = b_{m1}y_1 + \ldots + b_{m,m-1}y_{m-1} + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + \varepsilon_m. \end{cases} \tag{1.28}$$

Параметры уравнений этой системы также определяются методом наименьших квадратов, применяемым последовательно, начиная с первого, к каждому уравнению системы в отдельности.

Наибольшее распространение в эконометрических исследованиях получила *система взаимозависимых уравнений*, в которой одни и те же зависимые переменные в одних уравнениях входят в левую часть, а в других уравнениях – в правую часть системы. Это позволяет полнее учесть особенности структуры моделируемого объекта и оценить сложность внутренних взаимосвязей во всем их своеобразии.

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + \ldots + b_{1m}y_m \qquad + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + \ldots + b_{2m}y_m \qquad + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \varepsilon_2, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + \ldots + b_{3m}y_m \qquad + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = b_{m1}y_1 + b_{m2}y_2 + \ldots + b_{m,m-1}y_{m-1} + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + \varepsilon_n. \end{cases} \tag{1.29}$$

Система взаимозависимых уравнений получила название *системы совместных, одновременных уравнений*. Тем самым подчеркивается, что в системе одни и те же переменные одновременно рассматриваются как зависимые в одних уравнениях и как независимые в других. В эконометрике эта система уравнений называется также *структурной формой модели*. В отличие от предыдущих систем каждое уравнение системы одновременных уравнений не может рассматриваться самостоятельно, и для нахождения его параметров традиционный МНК неприменим. С этой целью используются специальные приемы оценивания.

Система совместных, одновременных уравнений (или структурная форма модели) содержит эндогенные и экзогенные переменные. *Эндогенные переменные* – это зависимые переменные, число которых равно числу уравнений в системе; их принято обозначать через y. *Экзогенные переменные* – это предопределенные переменные, влияющие на эндогенные переменные, но не зависящие от них; они обозначаются через x. Разделение переменных на эндогенные и экзогенные зависит от теоретической концепции принятой модели. Одни и те же переменные могут выступать в одних моделях как эндогенные, а в других как экзогенные.

Структурная форма модели позволяет увидеть влияние изменений любой экзогенной переменной на значения эндогенной переменной. Целесообразно в качестве экзогенных переменных выбирать такие переменные, которые могут быть объектом регулирования.

Структурная форма модели в правой части содержит при эндогенных переменных коэффициенты b_{ik} и экзогенных переменных – коэффициенты a_{ij}, которые называются *структурными коэффициентами* модели. Все переменные принято выражать в отклонениях от среднего уровня, т.е. под x подразумевается $x-\bar{x}$, а под y – соответственно $y-\bar{y}$. Поэтому свободный член в уравнениях системы (1.29) отсутствует.

Использование МНК для оценивания структурных коэффициентов модели дает, как принято считать в теории, смещенные и несостоятельные оценки. Поэтому для определения структурных коэффициентов модели структурная форма модели преобразуется в *приведенную форму*, которая представляет собой систему линейных уравнений, где эндогенные переменные присутствуют только в их левых частях.

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \ldots + \delta_{1n}x_n + u_1, \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \ldots + \delta_{2n}x_n + u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = \delta_{m1}x_1 + \delta_{m2}x_2 + \ldots + \delta_{mn}x_n + u_m, \end{cases} \qquad (1.30)$$

где δ_{ij} – коэффициенты приведенной формы модели, u_i – остаточная величина для приведенной формы.

По своему виду приведенная форма модели ничем не отличается от системы независимых уравнений, параметры которой оцениваются традиционным МНК. Применяя МНК, можно оценить δ_{ij}, а затем выполнить переход к структурной форме и получить оценки соответствующих коэффициентов.

Коэффициенты приведенной формы модели представляют собой нелинейные функции коэффициентов структурной формы модели. Рассмотрим это положение на примере простейшей структурной модели, выразив коэффициенты приведенной формы модели через коэффициенты структурной модели.

Для структурной модели вида (1.29) с двумя эндогенными и и двумя экзогенными переменными

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

приведенная форма модели (1.30) имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + u_1, \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + u_2. \end{cases}$$

Из первого уравнения структурной формы можно выразить y_2 следующим образом (ради упрощения опускаем случайную величину):

$$y_2 = \frac{y_1 - a_{11}x_1}{b_{12}}.$$

Подставляя во второе уравнение , получим

$$\frac{y_1 - a_{11}x_1}{b_{12}} = b_{21}y_1 + a_{22}x_2,$$

откуда

$$y_1 = \frac{a_{11}}{1 - b_{12}b_{21}} x_1 + \frac{a_{22}b_{12}}{1 - b_{12}b_{21}} x_2 .$$

Поступая аналогично со вторым уравнением, получим

$$y_2 = \frac{a_{11}b_{21}}{1 - b_{12}b_{21}} x_1 + \frac{a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}} x_2 ,$$

таким образом

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_{11}}{1 - b_{12}b_{21}} x_1 + \dfrac{a_{22}b_{12}}{1 - b_{12}b_{21}} x_2 , \\ y_2 = \dfrac{a_{11}b_{21}}{1 - b_{12}b_{21}} x_1 + \dfrac{a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}} x_2 . \end{cases}$$

Отсюда следует вывод, что коэффициенты приведенной формы модели будут выражаться через коэффициенты структурной формы как

$$\delta_{11} = \frac{a_{11}}{1 - b_{12}b_{21}}, \quad \delta_{12} = \frac{a_{22}b_{12}}{1 - b_{12}b_{21}},$$

$$\delta_{21} = \frac{a_{11}b_{21}}{1 - b_{12}b_{21}}, \quad \delta_{22} = \frac{a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}}.$$

Заметим, что приведенная форма модели, хотя и позволяет получить выражение значений эндогенной переменной через значения экзогенных переменных, аналитически уступает структурной форме модели, так как не позволяет получить оценки взаимосвязи между эндогенными переменными.

При переходе от приведенной формы модели к структурной возникает проблема идентификации. Здесь под *идентификацией* понимается единственность соответствия между элементами приведенной и структурной формами модели.

Структурная модель (1.29) в полном виде содержит $m \cdot (n + m - 1)$ параметров, а приведенная форма модели в полном виде содержит $m \cdot n$ параметров. Т.е. в полном виде структурная модель содержит большее число параметров, чем приведенная форма модели. Разумеется, $m \cdot (n + m - 1)$ параметров структурной модели не могут быть однозначно определены из $m \cdot n$ параметров приведенной формы модели.

Чтобы получить единственно возможное решение для структурной модели, необходимо предположить, что некоторые из структурных коэффициентов модели ввиду слабой взаимосвязи признаков с эндогенной переменной из левой части системы равны нулю. Тем самым число структурных коэффициентов модели уменьшается. С позиции идентифицируемости структурные модели можно подразделить на три вида:

1) идентифицируемые;
2) неидентифицируемые;
3) сверхидентифицируемые.

Модель *идентифицируема*, если все структурные ее коэффициенты определяются однозначно, единственным образом по коэффициентам приведенной формы модели, т.е. если число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной формы модели.

Модель *неидентифицируема*, если число приведенных коэффициентов меньше числа структурных коэффициентов, и в результате структурные коэффициенты не могут быть оценены через коэффициенты приведенной формы модели.

Модель *сверхидентифицируема*, если число коэффициентов приведенной формы больше числа структурных коэффициентов. В этом случае на основе коэффициентов приведенной формы можно получить несколько значений одного структурного коэффициента. Сверхидентифицируемая модель в отличие от неидентифицируемой модели практически решаема, но требует для этого специальных методов исчисления параметров.

Модель считается идентифицируемой, если каждое уравнение системы идентифицируемо. Если хотя бы одно из уравнений системы неидентифицируемо, то и вся модель считается неидентифицируемой. Сверхидентифицируемая модель содержит хотя бы одно сверхидентифицируемое уравнение.

Выполнение условия идентифицируемости модели проверяется для каждого уравнения системы. Чтобы уравнение было идентифицируемо, необходимо, чтобы число предопределенных переменных, отсутствующих в данном уравнении, но присутствующих в системе, было равно числу эндогенных переменных в данном уравнении без одного.

Если обозначить число эндогенных переменных в i-м уравнении системы через H, а число экзогенных (предопределенных) переменных, которые содержатся в системе, но не входят в данное уравнение, — через D, то условие идентифицируемости модели может быть записано в виде счетного правила (таблица 9).

Таблица 9

$D+1=H$	уравнение идентифицируемо
$D+1<H$	уравнение неидентифицируемо
$D+1>H$	уравнение сверхидентифицируемо

Рассмотренное счетное правило отражает необходимое, но не достаточное условие идентификации. Более точно условия идентификации определяются, если накладывать ограничения на коэффициенты матриц параметров структурной модели. Уравнение идентифицируемо, если по отсутствующим в нем переменным (эндогенным и экзогенным) можно из коэффициентов при них в других уравнениях системы получить матрицу, определитель которой не равен нулю, а ранг матрицы не меньше, чем число эндогенных переменных в системе без одного.

Целесообразность проверки условия идентификации модели через определитель матрицы коэффициентов, отсутствующих в данном уравнении, но присутствующих в других, объясняется тем, что возможна ситуация, когда для каждого уравнения системы выполнено счетное правило, а определитель матрицы названных коэффициентов равен нулю. В этом случае соблюдается лишь необходимое, но недостаточное условие идентификации.

В эконометрических моделях часто наряду с уравнениями, параметры которых должны быть статистически оценены, используются балансовые тождества переменных, коэффициенты при которых равны ± 1. В этом случае, хотя само тождество и не требует проверки на идентификацию, ибо коэффициенты при переменных в тождестве известны, в проверке на идентификацию других уравнений структурной системы тождества участвуют.

Пример 7. Приведенная форма некоторой эконометрической модели имеет вид $\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11} \cdot Y_t + b_{12} \cdot C_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21} \cdot r_t + b_{22} \cdot I_{t-1} + \varepsilon_2, \\ r_t = a_3 + b_{31} \cdot Y_t + b_{32} \cdot M_t + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$

где C_t – расходы на потребление в период t, Y_t – совокупный доход в период t, I_t – инвестиции в период t, r_t – процентная ставка в период t, M_t – денежная масса в период t, G_t – государственные расходы в период t, C_{t-1} – расходы на потребление в период $t-1$, I_{t-1} инвестиции в период $t-1$. Первое уравнение – функция потребления, второе уравнение – функция инвестиций, третье уравнение – функция денежного рынка, четвертое уравнение – тождество дохода.

Модель представляет собой систему одновременных уравнений. Проверим каждое ее уравнение на идентификацию.

Модель включает четыре эндогенные переменные (C_t, I_t, Y_t, r_t) и четыре предопределенные переменные (две экзогенные переменные – M_t и G_t и две лаговые переменные – C_{t-1} и I_{t-1}).

Проверим необходимое условие идентификации для каждого из уравнений модели.

Первое уравнение: $C_t = a_1 + b_{11} \cdot Y_t + b_{12} \cdot C_{t-1} + \varepsilon_1$. Это уравнение содержит две эндогенные переменные C_t и Y_t и одну предопределенную переменную C_{t-1}. Таким образом, $H = 2$, а $D = 4 - 1 = 3$, т.е. выполняется условие $D + 1 > H$. Уравнение сверхидентифицируемо.

Второе уравнение: $I_t = a_2 + b_{21} \cdot r_t + b_{22} \cdot I_{t-1} + \varepsilon_2$. Оно включает две эндогенные переменные I_t и r_t и одну экзогенную переменную I_{t-1}. Выполняется условие $D + 1 = 3 + 1 > H = 2$. Уравнение сверхидентифицируемо.

Третье уравнение: $r_t = a_3 + b_{31} \cdot Y_t + b_{32} \cdot M_t + \varepsilon_3$. Оно включает две эндогенные переменные Y_t и r_t и одну экзогенную переменную M_t. Выполняется условие $D + 1 = 3 + 1 > H = 2$. Уравнение сверхидентифицируемо.

Четвертое уравнение: $Y_t = C_t + I_t + G_t$. Оно представляет собой тождество, параметры которого известны. Необходимости в идентификации нет.

Таким образом, все уравнения модели сверхидентифицируемы. Приведенная форма модели в общем виде будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} C_t = A_1 + \delta_{11}C_{t-1} + \delta_{12}I_{t-1} + \delta_{13}M_t + \delta_{14}G_t + u_1, \\ I_t = A_2 + \delta_{21}C_{t-1} + \delta_{22}I_{t-1} + \delta_{23}M_t + \delta_{24}G_t + u_2, \\ r_t = A_3 + \delta_{31}C_{t-1} + \delta_{32}I_{t-1} + \delta_{33}M_t + \delta_{34}G_t + u_3, \\ Y_t = A_4 + \delta_{41}C_{t-1} + \delta_{42}I_{t-1} + \delta_{43}M_t + \delta_{44}G_t + u_1. \end{cases}$$

Пример 8. Структурная форма некоторой эконометрической модели имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + a_{22}x_2 \, . \\ y_3 &= b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

Ниже представлена соответствующая ей приведенная форма модели

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 \\ y_2 &= 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 \, . \\ y_3 &= -5x_1 + 8x_2 + 5x_3 \end{aligned}$$

Оценить идентифицируемость данной модели и найти коэффициенты ее структурной формы.

Применяя необходимый признак идентифицируемости, проверим каждое из уравнений структурной формы. Первое уравнение содержит две эндогенные переменные. Из трех экзогенных переменных не входит в состав первого уравнения только одна. Т. е. для первого уравнения системы Н = 2; D = 1. Условие Н = D + 1 выполнено. Следовательно, первое уравнение системы идентифицируемо. Второе уравнение структурной формы содержит три эндогенные переменные и две из трех экзогенных переменных в него не входят, что свидетельствует о его идентифицируемости. Структура третьего уравнения полностью аналогична первому. Таким образом, система в целом идентифицируема.

Заметим, что первое уравнение структурной формы модели не содержит переменной x_2, но в его правой части есть переменные y_3, x_1, x_3. Поэтому из третьего уравнения приведенной формы модели выразим переменную x_2 и подставим полученный результат в первое уравнение приведенной формы.

$$x_2 = \frac{y_3 + 5x_1 - 5x_3}{8} \Rightarrow y_1 = 2x_1 + 4\frac{y_3 + 5x_1 - 5x_3}{8} + 10x_3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_1 = 0{,}5y_3 + 4{,}5x_1 + 7{,}3x_3.$$

Первое уравнение структурной формы получено: $b_{13} = 0{,}5;\ a_{11} = 4{,}5\ a_{13} = 7{,}3$.

Во втором уравнении структурной формы модели отсутствуют переменные x_1 и x_3. Выражая их из первого и третьего уравнений приведенной форм, получим

$$x_1 = \frac{y_1 - 4x_2 - 10x_3}{2} = 0{,}5y_1 - 2x_2 - 5x_3$$ и

$$x_3 = \frac{y_3 + 5x_1 - 8x_2}{5} = 0{,}2y_3 + x_1 - 1{,}6x_2.$$ Подставляя x_3 в первое выражение, а x_1 во второе, сохраняем только те переменные, которые содержатся во втором уравнении структурной формы модели

$$x_1 = \frac{0{,}5y_1 - y_3 + 6x_2}{6} \text{ и } x_3 = \frac{0{,}5y_1 + 0{,}2y_3 - 3{,}6x_2}{6}.$$

И, обращаясь ко второму уравнению приведенной формы, имеем

$$y_2 = 3\frac{0{,}5y_1 - y_3 + 6x_2}{6} + 6x_2 + 2\frac{0{,}5y_1 + 0{,}2y_3 - 3{,}6x_2}{6} = \\ = 0{,}417y_1 - 0{,}433y_3 - 4{,}2x_2.$$

Второе уравнение структурной формы получено: $b_{21} = 0{,}417;\ b_{23} = -0{,}433;\ a_{22} = -4{,}2.$

В третьем уравнении структурной формы модели отсутствует переменная x_2. Выразим ее из второго уравнения приведенной формы и подставим в третье

$$x_2 = \frac{-y_2 + 3x_1 + 2x_3}{6} \Rightarrow y_3 = -5x_1 + 8\frac{-y_2 + 3x_1 + 2x_3}{6} + 5x_3 \Rightarrow \\ \Rightarrow y_3 = -1{,}33y_1 - x_1 + 7{,}66x_3.$$

Третье уравнение структурной формы получено: $b_{32} = -1{,}33;\ a_{31} = -1;\ a_{33} = 7{,}66.$

Коэффициенты структурной модели могут быть оценены разными способами в зависимости от вида системы одновременных уравнений. Наибольшее распространение получили следующие методы оценивания коэффициентов структурной модели:

1) косвенный метод наименьших квадратов;

2) двухшаговый метод наименьших квадратов;

3) трехшаговый метод наименьших квадратов;

4) метод максимального правдоподобия с полной информацией;

5) метод максимального правдоподобия при ограниченной информации.

Рассмотрим вкратце сущность каждого из этих методов.

Косвенный метод наименьших квадратов (КМНК) применяется в случае точно идентифицируемой структурной модели. Процедура применения КМНК предполагает выполнение следующих этапов работы.

1. Используя взаимно однозначное соответствие между параметрами идентифицируемой модели, структурная модель преобразуется в приведенную форму.

2. Для каждого уравнения приведенной формы модели обычным МНК оцениваются приведенные коэффициенты δ_{ij}.

3. Коэффициенты приведенной формы модели трансформируются в параметры структурной модели.

Если система сверхидентифицируема, то КМНК не используется, ибо он не дает однозначных оценок для параметров структурной модели. В этом случае могут использоваться разные методы оценивания, среди которых наиболее распространенным и простым является двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК).

Основная идея ДМНК – на основе приведенной формы модели получить для сверхидентифицируемого уравнения теоретические значения эндогенных переменных, содержащихся в правой части уравнения.

Далее, подставив их вместо фактических значений, можно применить обычный МНК к структурной форме сверхидентифицируемого уравнения. Метод получил название двухшагового МНК, ибо дважды используется МНК: на первом шаге при определении приведенной формы модели и нахождении на ее основе оценок теоретических значений эндогенной переменной $y_i = \delta_{i1}x_1 + \delta_{i2}x_2 + ... + \delta_{in}x_n$ и на втором шаге применительно к структурному сверхидентифицируемому уравнению при определении структурных коэффициентов модели по данным теоретических (расчетных) значений эндогенных переменных.

Косвенный и двухшаговый методы наименьших квадратов подробно описаны в литературе и рассматриваются как традиционные методы оценки коэффициентов структурной модели. Эти методы достаточно легко реализуемы.

Дальнейшим развитием ДМНК является трехшаговый МНК (ТМНК), предложенный в 1962 г. А. Зельнером и Г. Тейлом. Этот метод оценивания пригоден для всех видов уравнений структурной модели. Однако при некоторых ограничениях на параметры более эффективным оказывается ДМНК.

Метод максимального правдоподобия рассматривается как наиболее общий метод оценивания, результаты которого при нормальном распределении признаков совпадают с МНК. Однако при большом числе уравнений системы этот метод приводит к достаточно сложным вычислительным процедурам. Поэтому в качестве модификации используется метод максимального правдоподобия при ограниченной информации (метод наименьшего дисперсионного отношения), разработанный в 1949 г. Т.Андерсоном и Н.Рубиным.

В заключении данного параграфа рассмотрим чисто расчетный пример, иллюстрирующий механизм действия косвенного метода наименьших квадратов.

Пример 9. По материалам таблицы 10 построить эконометрическую регрессионную модель, представляющую собой систему одновременных линейных уравнений, структурная форма которой имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 + b_{12} y_2 + a_{11} x_1 \\ y_2 &= A_2 + b_{21} y_1 + a_{22} x_2 \end{aligned}.$$

Таблица 10

№ п/п	y_1	y_2	x_1	x_2	$u_1 = y_1 - \bar{y}_1$	$u_2 = y_2 - \bar{y}_2$	$z_1 = x_1 - \bar{x}_1$	$z_2 = x_2 - \bar{x}_2$
1	2	5	1	3	-2	-1,2	-1,4	-0,4
2	3	6	2	1	-1	-0,2	-0,4	-2,4
3	4	7	3	2	0	0,8	0,6	-1,4
4	5	8	2	5	1	1,8	-0,4	1,6
5	6	5	4	6	2	-1,2	1,6	2,6

Непосредственной проверкой необходимого условия легко убедиться, что данная модель является идентифицируемой, а значит, для вычисления ее параметров применим аппарат косвенного метода наименьших квадратов.

В соответствии с рекомендациями по применению косвенного метода наименьших квадратов перейдем от натуральных переменных к центрированным,, значения которых рассчитаны в столбцах 6 – 9 таблицы 10

$$\begin{aligned} u_1 &= b_{12}u_2 + a_{11}z_1 \\ u_2 &= b_{21}u_1 + a_{22}z_2 \end{aligned}.$$

Перейдем к приведенной форме модели

$$\begin{aligned} u_1 &= \delta_{11}z_1 + \delta_{12}z_2 \\ u_2 &= \delta_{21}z_1 + \delta_{22}z_2 \end{aligned}$$

и, используя стандартную процедуру метода наименьших квадратов (1..3) для каждого уравнения системы в отдельности, получим соотношения для отыскания δ_{ij}.

$$\begin{aligned} 5{,}2\delta_{11} + 4{,}2\delta_{12} &= 6 \\ 4{,}2\delta_{11} + 17{,}2\delta_{12} &= 10 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} 5{,}2\delta_{21} + 4{,}2\delta_{22} &= -0{,}4 \\ 4{,}2\delta_{21} + 17{,}2\delta_{22} &= -0{,}4 \end{aligned},$$

откуда $\delta_{11} = 0{,}852;\ \delta_{12} = 0{,}376;\ \delta_{21} = -0{,}072;\ \delta_{22} = -0{,}00557$. Таким образом, приведенная форма модели будет иметь вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= \ \ 0{,}852z_1 + 0{,}376z_2 \\ u_2 &= -0{,}072z_1 - 0{,}00557z_2 \end{aligned}.$$

Выражая переменную z_2 из второго уравнения этой системы, и, подставляя в первое, получим первое уравнение структурной формы модели

$$z_2 = \frac{-u_2 - 0{,}072z_1}{0{,}00557} \Rightarrow u_1 = 0{,}852z_1 + 0{,}376 \cdot \frac{-u_2 - 0{,}072z_1}{0{,}00557} =$$
$$= -67{,}5u_2 - 4{,}01z_1.$$

Выражая переменную z_1 из первого уравнения, и, производя аналогичные действия, получим второе уравнение структурной формы модели

$$z_1 = \frac{u_1 - 0{,}376z_2}{0{,}852} \ \Rightarrow\ u_2 = -0{,}00557z_2 - 0{,}072 \cdot \frac{u_1 - {,}376z_2}{0{,}852} = .$$
$$= -0{,}085u_1 + 0{,}028z_2$$

Находя оценки свободных членов

$$A_1 = \bar{y}_1 - b_{12}\bar{y}_2 - a_{11}\bar{x}_1 = 432{,}124; \qquad A_2 = \bar{y}_2 - b_{21}\bar{y}_1 - a_{22}\bar{x}_2 = 6{,}452,$$

и, возвращаясь к исходным переменным, структурную форму модели в натуральной размерности

$$y_1 = 432{,}124 - 67{,}5y_2 - 4{,}01x_1$$
$$y_2 = 6{,}452 - 0{,}085y_1 + 0{,}028x_2 .$$

Задачи для самостоятельного решения.

№17. Макроэкономическая модель (одна из версий модели Клейна):

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{12}Y_t + b_{13}T_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{24}K_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t, \end{cases}$$

где C – потребление; I – инвестиции; Y – доход; T – налоги; K – запас капитала; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Сделать заключение об идентифицируемости модели; в общем виде записать приведенную форму модели. Трудоемкость – 10 (мин/раб) эксперта.

№18. Модель Кейнса (одна из версий):

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}Y_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – потребление; Y – ВВП; I – валовые инвестиции; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Сделать заключение об идентифицируемости модели; в общем виде записать приведенную форму модели. Трудоемкость – 10 (мин/раб) эксперта.

№19. Модель денежного и товарного рынков:

$$\begin{cases} R_t = a_1 + b_{12}Y_t + b_{14}M_t + \varepsilon_1, \\ Y_t = a_2 + b_{21}R_t + b_{23}I_t + b_{25}G_t + \varepsilon_2, \\ I_t = a_3 + b_{31}R_t + \varepsilon_3, \end{cases}$$

где R – процентные ставки; Y – реальный ВВП; M – денежная масса; I – внутренние инвестиции; G – реальные государственные расходы.

Сделать заключение об идентифицируемости модели; в общем виде записать приведенную форму модели. Трудоемкость – 10 (мин/раб) эксперта.

№20. Модель денежного рынка:

$$\begin{cases} R_t = a_1 + b_{11}M_t + b_{12}Y_t + +\varepsilon_1, \\ Y_t = a_2 + b_{21}R_t + b_{22}I_t + \varepsilon_2, \\ I_t = a_3 + b_{33}R_t + \varepsilon_3, \end{cases}$$

где R – процентные ставки; Y – ВВП; M – денежная масса; I – внутренние инвестиции.

Сделать заключение об идентифицируемости модели; в общем виде записать приведенную форму модели. Трудоемкость – 10 (мин/раб) эксперта.

№21. Ниже приведены структурная и приведенная формы некоторой эконометрической модели:

$$\begin{array}{lcl} y_1 = -4 + (?)y_2 - 9{,}4x_2 + \varepsilon_1 & & y_1 = 2 - 4x_1 - 3x_2 + \delta_1 \\ y_2 = 12{,}83 - 2{,}67y_1 + (?)x_1 + \varepsilon_2 & \Leftrightarrow & y_2 = 7{,}5 + 5x_1 + 8x_2 + \delta_2 \\ y_3 = 1{,}36 - 1{,}76_1 + 0{,}828y_2 + \varepsilon_3 & & y_3 = 4{,}05 + (?)x_1 + (?)x_2 + \delta_3 \end{array}$$

Найти недостающие коэффициенты обеих форм модели. Трудоемкость – 20 (мин/раб) эксперта.

№22. Ниже приведены структурная и приведенная формы некоторой эконометрической модели:

$$\begin{array}{lcl} y_1 = a_1 + b_{12}y_2 + \varepsilon_1 & & y_1 = -1 + 24x_1 + 0{,}64x_2 + \delta_1 \\ y_2 = a_2 + b_{21}y_1 + c_{21}x_1 + \varepsilon_2 & \Leftrightarrow & y_2 = 2{,}8 - 4x_2 + 10{,}5x_3 + \delta_2 \\ y_3 = y_2 + x_2 & & y_3 = -6 + 12x_1 + 18x_2 + \delta_3 \end{array}$$

Выяснить какие из уравнений структурной формы модели являются идентифицируемыми; найти коэффициенты тех уравнений структурной формы, для которых это возможно. Трудоемкость – 20 (мин/раб) эксперта.

№23. Структурная форма некоторой эконометрической модели имеет вид:

$$y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + a_{22}x_2\,.$$
$$y_3 = b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{33}x_3$$

Ниже представлена соответствующая ей приведенная форма модели

$$y_1 = 2x_1 - 4x_2 + 10x_3$$
$$y_2 = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3\,.$$
$$y_3 = -5x_1 + 6x_2 + 5x_3$$

Оценить идентифицируемость данной модели и найти коэффициенты ее структурной формы. Трудоемкость – 30 (мин/раб) эксперта.

№24. Найти коэффициенты структурной формы эконометрической модели вида:

$$y_1 = b_2y_2 + a_1x_1 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = b_1y_1 + a_2x_2 + \varepsilon_2\,,$$

Если известно, что $\sum y_1x_1 = 260;\ \sum y_1x_2 = 435;\ \sum x_1^2 = 120;\ \sum x_2^2 = 180;\ \sum x_1x_2 = 150$, а одно из уравнений приведенной формы имеет вид $y_2 = 2x_1 + 3x_2$. Трудоемкость – 20 (мин/раб) эксперта.

1.8. Прогнозирование временных рядов

«Управлять – это значит предвидеть». Трудно не согласиться с этим утверждением одного из отцов-основателей кибернетики. Действительно, принятие ответственных управленческих решений без глубокой проработки возможных последствий их реализации в будущем, чревато серьезными, подчас невосполнимыми потерями материальных ресурсов, времени, политического влияния и т. д. Однако, способность предвидения качество довольно редкое, практически не алгоритмизируемое, связанное с особенностями психики человека, его интуицией, умением воспринимать так называемые «слабые сигналы». Иначе говоря, предвидение серьезное, а не спекулятивно-шарлатанское, удел очень немногих и своеобразно одаренных личностей. Может быть именно поэтому, большинство наиболее известных предвидений дают чрезвычайно общее описание событий и весьма расплывчаты в деталях.

Тем не менее, настоятельная необходимость «заглянуть в завтрашний день» есть объективная реальность дня сегодняшнего. Нельзя осуществлять квалифицированное управление экономикой, не зная сколько технологов, агрономов, программистов, машиностроителей потребуется через 5 – 7 лет. Невозможно планировать развитие инфраструктуры большого города, не имея сведений о том, какое количество автомобилей будет ездить по его дорогам через 10 лет, сколько воды и электроэнергии будут потреблять его жители. И, поскольку точность предвидений, основанных на экстрасенсорных способностях и оккультных знаниях, сомнительна, единственным способом решения поставленной задачи остается *прогноз*, под которым мы будем понимать статистически выверенное заключение о развитии явления, сделанное на основе количественного анализа его предистории. Именно это является содержанием данного параграфа.

Временным рядом или рядом динамики называется совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов или периодов времени. Каждый уровень временного ряда формируется под воздействием большого числа факторов, которые условно можно подразделить на три группы:

1) факторы, формирующие тенденцию ряда;
2) факторы, формирующие циклические колебания ряда;
3) случайные факторы.

Рассмотрим воздействие каждого фактора на временной ряд в отдельности.

Большинство временных рядов экономических показателей имеют тенденцию, характеризующую совокупное долговременное воздействие множества факторов на динамику изучаемого показателя. Все эти факторы, взятые в отдельности, могут оказывать разнонаправленное воздействие на исследуемый показатель. Однако в совокупности они формируют его возрастающую или убывающую тенденцию. На рис. 10 показан гипотетический временной ряд, содержащий возрастающую тенденцию.

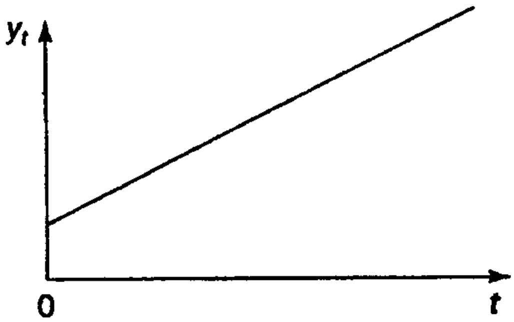


Рис. 10. Ряд, содержащий только тенденцию

Изучаемый показатель может быть также подвержен циклическим колебаниям. Эти колебания могут носить сезонный характер, поскольку экономическая деятельность ряда отраслей экономики зависит от времени года (например, цены на сельскохозяйственную продукцию в летний период ниже, чем в зимний; уровень безработицы в курортных городах в зимний период выше по сравнению с летним). При наличии больших массивов данных за длительные промежутки времени можно выявить циклические колебания, связанные с общей динамикой конъюнктуры рынка. На рис. 11 представлен гипотетический временной ряд, содержащий только сезонную (циклическую) компоненту.

Рис. 11. Ряд, содержащий только сезонную компоненту

Некоторые временные ряды не содержат тенденции и циклической компоненты, а каждый следующий их уровень образуется как сумма среднего уровня ряда и некоторой (положительной или отрицательной) случайной компоненты. Пример ряда, содержащего только случайную компоненту, приведен на рис. 12.

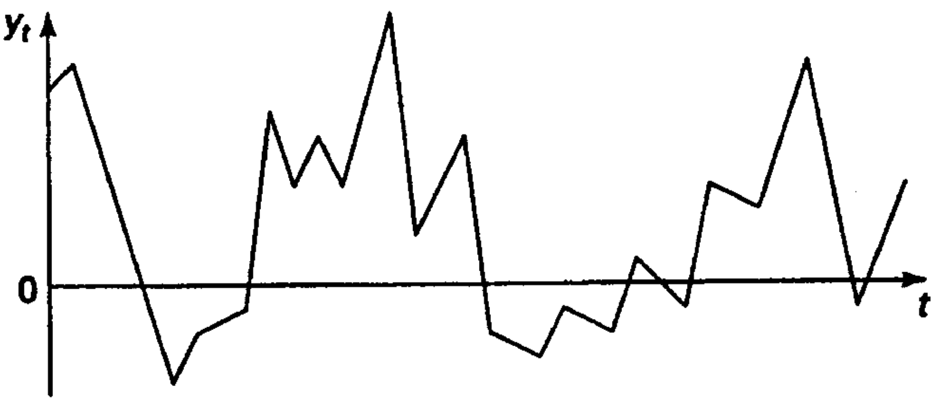


Рис. 12. Ряд, содержащий только случайную компоненту

В большинстве случаев фактический уровень временного ряда можно представить как сумму или произведение трендовой, циклической и случайной компонент. Модель, в которой временной ряд представлен как сумма перечисленных компонент, называется *аддитивной моделью* временного ряда. Модель, в которой временной ряд представлен как произведение перечисленных компонент, называется *мультипликативной моделью* временного ряда. Основная задача эконометрического исследования конкретного временного ряда – выявление и придание количественного выражения каждой из перечисленных выше компонент с тем, чтобы использовать полученную информацию для прогнозирования будущих значений ряда или при построении моделей взаимосвязи двух или более временных рядов.

При наличии во временном ряде тенденции и циклических колебаний значения каждого последующего уровня ряда зависят от предыдущих. Корреляционную зависимость между последовательными уровнями временного ряда называют *автокорреляцией* уровней ряда.

Количественно ее можно измерить с помощью линейного коэффициента корреляции между уровнями исходного временного ряда и уровнями этого ряда, сдвинутыми на несколько временных интервалов.

Формула для расчета коэффициента автокорреляции имеет вид:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n}(y_t - \overline{y}_1)(y_{t-1} - \overline{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n}(y_t - \overline{y}_1)^2 \sum_{t=2}^{n}(y_{t-1} - \overline{y}_2)^2}}, \tag{1.31}$$

где $\overline{y}_1 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} y_t, \qquad \overline{y}_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}.$

Эту величину называют *коэффициентом автокорреляции уровней ряда первого порядка*, так как он измеряет зависимость между соседними уровнями ряда y_t и y_{t-1}.

Аналогично можно определить коэффициенты автокорреляции второго и более высоких порядков. Так, коэффициент автокорреляции второго порядка характеризует тесноту связи между уровнями y_t и y_{t-2} и определяется по формуле:

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n}(y_t - \overline{y}_3)(y_{t-2} - \overline{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^{n}(y_t - \overline{y}_3)^2 \sum_{t=3}^{n}(y_{t-2} - \overline{y}_4)^2}}, \tag{1.32}$$

где $\overline{y}_3 = \frac{1}{n-2}\sum_{t=3}^{n} y_t, \qquad \overline{y}_4 = \frac{1}{n-2}\sum_{t=3}^{n} y_{t-2}.$

Число периодов, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, называют *лагом*. С увеличением лага число пар значений, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, уменьшается. Считается целесообразным для обеспечения статистической достоверности коэффициентов автокорреляции использовать правило – максимальный лаг должен быть не больше $n/4$.

Как видно из выражений (1.31) и (1.32) вычисление коэффициентов автокорреляции полностью аналогично вычислению линейных коэффициентов корреляции и таким образом характеризует тесноту только линейной связи текущего и предыдущего уровней ряда. Поэтому по коэффициенту автокорреляции можно судить лишь о наличии линейной (или близкой к линейной) тенденции. Для некоторых временных рядов, имеющих сильную нелинейную тенденцию (например, параболу второго порядка или экспоненту), коэффициент автокорреляции уровней исходного ряда может незначимо отличаться от нуля.

По знаку коэффициента автокорреляции нельзя делать вывод о возрастающей или убывающей тенденции в уровнях ряда. То есть знак «+» коэффициента автокорреляции не является свидетельством возрастающей тенденции.

Последовательность коэффициентов автокорреляции уровней первого, второго и т.д. порядков называют *автокорреляционной функцией* временного ряда. График зависимости ее значений от величины лага (порядка коэффициента автокорреляции) называется *коррелограммой*.

Анализ автокорреляционной функции и коррелограммы позволяет определить лаг, при котором автокорреляция наиболее высокая, и лаг, при котором связь между текущим и предыдущими уровнями ряда наиболее тесная. Таким образом при помощи анализа автокорреляционной функции и коррелограммы можно выявить структуру ряда.

Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции первого порядка, в исследуемом ряде преобладает влияние тенденции. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка k, то ряд содержит циклические колебания с периодичностью k единиц временного лага. Если ни один из коэффициентов автокорреляции не является значимым, можно сделать одно из двух предположений относительно структуры этого ряда: либо ряд не содержит значимого влияния тенденции и циклических колебаний, либо ряд содержит сильную нелинейную тенденцию, которую невозможно выявить посредством обработки коррелограммы. Поэтому коэффициент автокорреляции уровней и автокорреляционную функцию целесообразно использовать для выявления во временном ряде наличия или отсутствия трендовой и циклической (сезонной) компоненты.

Пример 10. Пусть имеются некоторые условные данные об общем количестве правонарушений на таможне одного из субъектов РФ (таблица 11).

Таблица 11

Год	Квартал	t	Количество возбужденных дел, y_t
1999	I	1	375
	II	2	371
	III	3	869
	IV	4	1015
2000	I	5	357
	II	6	471
	III	7	992
	IV	8	1020
2001	I	9	390
	II	10	355
	III	11	992
	IV	12	905
2002	I	13	461
	II	14	454
	III	15	920
	IV	16	927

Визуализируем материалы, содержащиеся в таблице 11, представив их в виде графика изменений числа правонарушений по кварталам (рис.13).

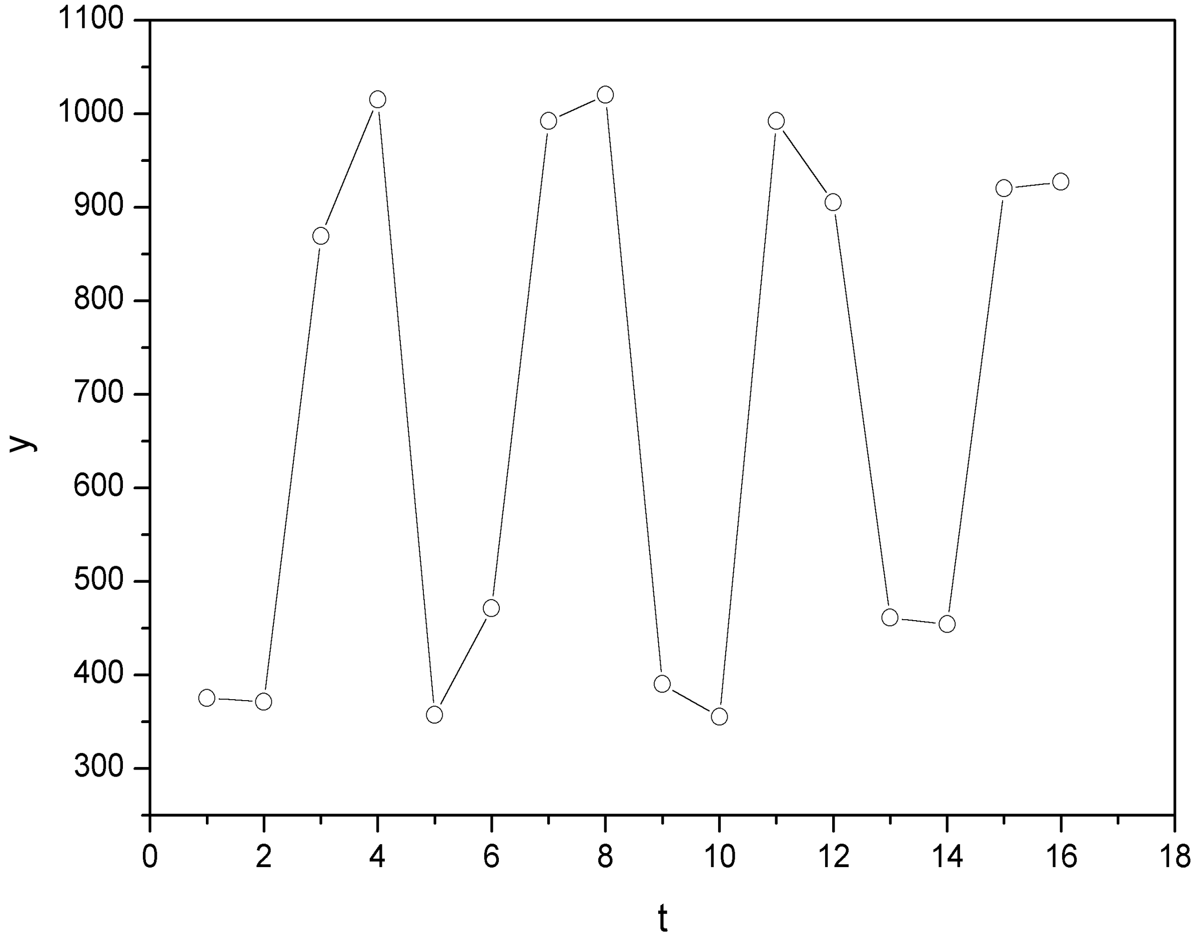


Рис. 13. График изменения числа правонарушений

Из графика отчетливо видно, что значения y образуют ломаную линию с явно выраженной периодичностью. Рассчитаем несколько последовательных коэффициентов автокорреляции.

По формуле (1.31) находим коэффициент автокорреляции первого порядка

$$r_1 = \frac{74085,13}{\sqrt{1153760,39 \cdot 1187469,73}} = 0,063294.$$

По формуле (1.32) – коэффициент автокорреляции второго порядка

$$r_2 = \frac{-1034792,71}{\sqrt{1037835,43 \cdot 1116776,36}} = -0,961183.$$

Аналогично находим коэффициенты автокорреляции более высоких порядков, и полученные результаты заносим в сводную таблицу 12.

Таблица 12

Лаг	Коэффициент автокорреляции уровней
1	0,063294
2	–0,961183
3	–0,036290
4	0,964735
5	0,050594
6	–0,976516
7	–0,069444
8	0,964629
9	0,162064
10	–0,972918
11	–0,065323
12	0,985761

Значения коэффициентов автокорреляции практически повторяются через каждые четыре единицы временного лага. Это позволяет утверждать, что в формирование уровней данного временного ряда весьма значительный вклад вносит сезонная составляющая, период которой составляет четыре квартала.

Распространенным способом моделирования тенденции временного ряда является построение алгебраического выражения, характеризующего зависимость уровней ряда от времени, или тренда. Этот способ называют *аналитическим выравниванием временного ряда*.

Поскольку зависимость от времени может принимать разные формы, для ее формализации можно использовать различные виды функций. Для построения трендов чаще всего применяются следующие функции:

– линейный тренд: $y_t = a + b \cdot t$;

– гипербола: $y_t = a + b/t$;

– экспоненциальный тренд: $y_t = e^{a+b\cdot t}$ (или $y_t = a\cdot b^t$);

– степенная функция: $y_t = a\cdot t^b$;

– полиномы различных степеней: $y_t = a + b_1\cdot t + b_2\cdot t^2 + ... + b_m\cdot t^m$

Параметры каждого из перечисленных выше трендов можно определить обычным МНК, используя в качестве независимой переменной время, выраженное в единицах временного лага, а в качестве зависимой переменной – фактические уровни временного ряда y_t. Для нелинейных трендов предварительно проводят стандартную процедуру их линеаризации.

Существует несколько способов определения типа тенденции. К числу наиболее распространенных относятся качественный анализ изучаемого процесса, построение и визуальный анализ графика зависимости уровней ряда от времени. В этих же целях можно использовать и коэффициенты автокорреляции уровней ряда. Тип тенденции можно определить путем сравнения коэффициентов автокорреляции первого порядка, рассчитанных по исходным и преобразованным уровням ряда. Если временной ряд имеет линейную тенденцию, то его соседние уровни y_t и y_{t-1} тесно коррелированы. В этом случае коэффициент автокорреляции первого порядка уровней исходного ряда оказывается высоким. Если временной ряд содержит нелинейную тенденцию, например, в форме экспоненты, то коэффициент автокорреляции первого порядка по логарифмам уровней исходного ряда будет выше, чем соответствующий коэффициент, рассчитанный по натуральным значениям уровней. Чем сильнее выражена нелинейная тенденция в изучаемом временном ряде, тем в большей степени будут различаться значения указанных коэффициентов.

Выбор наилучшего уравнения в случае, когда ряд содержит нелинейную тенденцию, можно осуществить путем перебора основных форм наиболее употребительных трендов, расчета по каждому уравнению скорректированного коэффициента детерминации и средней ошибки аппроксимации. Этот метод легко реализуется при компьютерной обработке данных.

Обратимся теперь к вопросу моделирования циклической (сезонной) составляющей временных рядов, которая в ряде случаев вносит решающий вклад в формирование их уровней. Простейший подход к моделированию сезонных колебаний – это расчет значений сезонной компоненты методом скользящей средней и построение *аддитивной* или *мультипликативной* модели временного ряда.

Общий вид аддитивной модели

$$Y = T + S + E. \tag{1.33}$$

предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как сумма трендовой (T), сезонной (S) и случайной (E) компонент.

Общий вид мультипликативной модели

$$Y = T \cdot S \cdot E. \tag{1.34}$$

предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как произведение трендовой (T), сезонной (S) и случайной (E) компонент.

Выбор одной из двух моделей осуществляется на основе анализа структуры сезонных колебаний. Если амплитуда колебаний приблизительно постоянна, строится аддитивная модель, в которой значения сезонной компоненты предполагаются неизменными для различных циклов. Если амплитуда сезонных колебаний с течением времени возрастает или уменьшается, предпочтение отдается мультипликативной модели.

Построение аддитивной и мультипликативной моделей сводится к расчету значений T, S и E для каждого уровня временного ряда.

Процесс построения модели включает в себя следующие шаги.

1) Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.

2) Расчет значений сезонной компоненты S.

3) Устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выровненных данных ($T + E$) в аддитивной или ($T \cdot E$) в мультипликативной форме.

4) Аналитическое выравнивание уровней $(T+E)$ или $(T \cdot E)$ и расчет значений трендовой составляющей T с использованием полученного уравнения.

5) Расчет полученных по модели значений $(T+S)$ или $(T \cdot S)$.

6) Прогноз будущих значений уровней временного ряда на основе построенной модели.

Замечание. Долгосрочные прогнозы, касающиеся моментов времени, находящихся на значительном удалении от последнего из наблюдаемых уровней временного ряда, являются заведомо неустойчивыми, поскольку представляют попытку экстраполяции современных технологий, научных знаний, юридических норм и т. п. в отдаленное будущее.

Методику построения каждой из моделей рассмотрим на примерах.

Пример 10.(Продолжение) Построение аддитивной модели временного ряда. Обратимся к данным об объеме правонарушений на таможне за четыре года, представленным в таблице 11.

Было показано, что данный временной ряд содержит сезонные колебания периодичностью 4 единицы временного лага. Рассчитаем компоненты аддитивной модели временного ряда.

Шаг 1. Проведем выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней. Для этого:

1.1. Просуммируем уровни ряда последовательно за каждые четыре квартала со сдвигом на один момент времени и определим условные годовые объемы правонарушений (столбец 3 таблицы 13).

1.2. Разделив полученные суммы на 4, найдем скользящие средние (столбец 4 таблицы 13). Полученные таким образом выровненные значения уже не содержат влияния сезонной компоненты.

1.3. Приведем эти значения в соответствие с фактическими моментами времени, для чего найдем средние значения из двух последовательных скользящих средних – *центрированные скользящие средние* (столбец 5 таблицы 13).

Таблица 13

№ квартала	Количество правонарушений, y_t	Итого за четыре квартала	Скользящая средняя за четыре квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	375	–	–	–	–
2	371	2630	657,5	–	–
3	869	2612	653	655,25	213,75
4	1015	2712	678	665,5	349,5
5	357	2835	708,75	693,75	-336,75
6	471	2840	710	709,375	-238,375
7	992	873	718,25	714,125	277,875
8	1020	757	689,25	703,75	316,25
9	390	757	689,25	689,25	-299,25
10	355	642	660,5	674,875	-319,875
11	992	713	678,25	669,375	322,625
12	905	812	703	690,625	214,375
13	461	740	685	694	-233
14	454	762	690,5	687,75	-233,75
15	920	–	–	–	–
16	927	–	–	–	–

Шаг 2. Найдем оценки сезонной компоненты как разность между фактическими уровнями ряда и центрированными скользящими средними (столбец 6 таблицы 13). Используем эти оценки для расчета значений сезонной компоненты S_i (таблица 14). Для этого найдем средние за каждый квартал (по всем годам) оценки сезонной компоненты $\overline{S}_i$.

Таблица 14

Показатели	год	№ квартала, i			
		I	II	III	IV
	1999	–	–	213,75	349,5
	2000	336,75	–238,375	277,875	316,25
	2001	–299,25	–319,875	322,625	214,375
	2002	–233	–233,75	–	–
Всего за i-й квартал		–869	–792	814,25	880,125
Средняя оценка сезонной компоненты для i-го квартала, $\bar{S}_i$		–289,667	–264	271,417	293,375
Скорректированная сезонная компонента, S_i		–292,448	–266,781	268,636	290,593

В моделях с сезонной компонентой обычно предполагается, что сезонные воздействия за период взаимопогашаются. В аддитивной модели это выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна нулю.

Для данной модели имеем:

–289,667 – 264 + 271,417 + 293,375 = 11,125.

Корректирующий коэффициент: k = 11,125/4 = 2,781.

Рассчитываем скорректированные значения сезонной компоненты ($S_i = \bar{S}_i - k$) и заносим полученные данные в таблицу 14.

Проверим равенство нулю суммы скорректированных значений сезонной компоненты:

–292,448 – 266,781 + 268,636 + 290,593 = 0,00.

Шаг 3. Исключим влияние сезонной компоненты, вычитая ее значение из каждого уровня исходного временного ряда. Получим величины $T + E = y_t - S$ (столбец 4 таблицы 15). Эти значения рассчитываются для каждого момента времени, выраженного в единицах временного лага, и содержат только тенденцию и случайную компоненту.

Таблица 15

t	y_t	S_i	$y_t - S_i$	T	$T+S$	$E = y_t - (T+S)$	E^2
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	375	-292,448	667,448	672,7	380,252	-5,252	27,584
2	371	-266,781	637,781	673,624	406,843	-35,843	1284,721
3	869	268,636	600,364	674,547	943,183	-74,183	5503,117
4	1015	290,593	724,407	675,47	966,063	48,937	2394,83
5	357	-292,448	649,448	676,394	383,946	-26,946	726,087
6	471	-266,781	737,781	677,317	410,536	60,464	3655,895
7	992	268,636	723,364	678,24	946,876	45,124	2036,175
8	1020	290,593	729,407	679,163	969,756	50,244	2524,46
9	390	-292,448	682,448	680,087	387,639	2,361	5,574
10	355	-266,781	621,781	681,01	414,229	-59,229	3508,074
11	992	268,636	723,364	681,933	950,569	41,431	1716,528
12	905	290,593	614,407	682,857	973,45	-68,45	4685,403
13	461	-292,448	753,448	683,78	391,332	69,668	4853,63
14	454	-266,781	720,781	684,703	417,922	36,078	1301,622
15	920	268,636	651,364	685,627	954,263	-34,263	1173,953
16	927	290,593	636,407	686,55	977,143	-50,143	2514,32

Шаг 4. Определим компоненту T данной модели. Для этого выполним аналитическое выравнивание ряда $(T+E)$, определив параметры линейного тренда с помощь метода наименьших квадратов, взяв в качестве факторной переменной время, выраженное в единицах временного лага (столбец 1 таблицы 15), а в качестве отклика элементы столбца 4 этой же таблицы. В результате получим линейное уравнение регрессии

$$\hat{T} = 671{,}759 + 0{,}9255 \cdot t.$$

Подставляя в него значения $t = 1, 2, ..., 16$, найдем уровни T для каждого момента времени (столбец 5 таблицы 15).

Шаг 5. Найдем значения уровней ряда, полученные по аддитивной модели. Для этого прибавим к выровненным уровням тренда T значения сезонной компоненты для соответствующих кварталов (столбец. 6 таблицы 15).

Фактические значения уровней временного ряда и расчетные, полученные с помощью аддитивной модели, представлены на рис. 14.

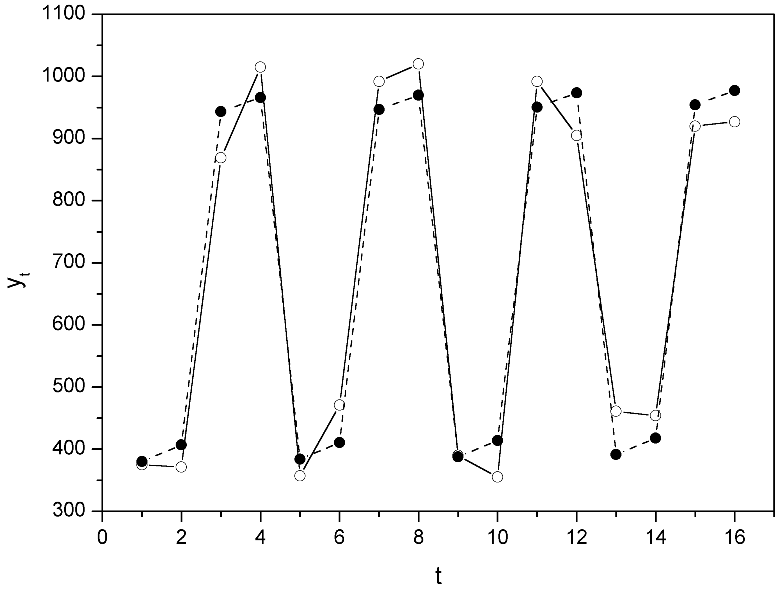


Рис. 14. Фактические и расчетные данные

Для оценки качества построенной модели можно использовать индекс детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum E^2}{\sum\left(y_t - \bar{y}\right)^2} = 1 - \frac{37901,872}{1252743,75} = 0,970.$$

Его значение утверждать, что аддитивная модель объясняет 97% общей вариации уровней временного ряда количества правонарушений по кварталам за 4 года.

Шаг 6. Прогнозирование по аддитивной модели. Предположим, что необходимо дать прогноз об общем объеме правонарушений на I и II кварталы 2003 года. Прогнозное значение Y_t уровня временного ряда в аддитивной модели есть сумма трендовой и сезонной компонент. Для определения трендовой компоненты воспользуемся уравнением тренда

$$T = 671,777 + 0,9233 \cdot t.$$

Получим

$$T_{17} = 671,777 + 0,9233 \cdot 17 = 687,473;$$

$$T_{18} = 671,777 + 0,9233 \cdot 18 = 688,396.$$

Значения сезонных компонент за соответствующие кварталы равны: $S_1 = -292,448$ и $S_2 = -266,781$. Таким образом,

$$Y_{17} = T_{17} + S_1 = 687,473 - 292,448 \approx 395;$$

$$Y_{18} = T_{18} + S_2 = 688,396 - 266,781 \approx 422.$$

Т.е. в первые два квартала 2003 г. следует ожидать порядка 395 и 422 правонарушений соответственно.

Пример 10 (Продолжение). Построение мультипликативной модели.

Шаг 1. Методика, применяемая на этом шаге, полностью совпадает с методикой построения аддитивной модели.

Таблица 16.

№ квартала,	Количество правонарушений, y_t	Итого за четыре квартала	Скользящая средняя за четыре квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	375	–	–	–	–
2	371	2630	657,5	–	–
3	869	2612	653	655,25	1,3262
4	1015	2712	678	665,5	1,5252
5	357	2835	708,75	693,375	0,5146
6	471	2840	710	709,375	0,6640
7	992	2873	718,25	714,125	1,3891
8	1020	2757	689,25	703,75	1,4494
9	390	2757	689,25	689,25	0,5658
10	355	2642	660,5	674,875	0,5260
11	992	2713	678,25	669,375	1,4820
12	905	2812	703	690,625	1,3104
13	461	2740	685	694	0,6643
14	454	2762	690,5	687,75	0,6601
15	920	–	–	–	–
16	927	–	–	–	–

Шаг 2. Найдем оценки сезонной компоненты как частное от деления фактических уровней ряда на центрированные скользящие средние (столбец 6 таблицы 16). Эти оценки используются для расчета сезонной компоненты S (таблица 17). Для этого найдем средние за каждый квартал оценки сезонной компоненты S_i. Так же как и в процессе построения аддитивной модели считается, что сезонные воздействия за период взаимопогашаются. В мультипликативной модели это выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна числу элементов временного лага в цикле. В нашем случае это число равно 4.

Таблица 17

Показатели	Год	№ квартала, i			
		I	II	III	IV
	1999	–	–	1,3262	1,5252
	2000	0,5149	0,6640	1,3891	1,4494
	2001	0,5658	0,5260	1,4820	1,3104
	2002	0,6643	0,6601	–	–
Всего за i-й квартал		1,7450	1,8501	4,1973	4,2850
Средняя оценка сезонной компоненты для i-го квартала, $\bar{S}_i$		0,5816	0,6167	1,3991	1,4283
Скорректированная сезонная компонента, S_i		0,5779	0,6128	1,3901	1,4192

Таким образом

$$0,5816 + 0,6167 + 1,3991 + 1,4283 = 4,0257,$$

а величина корректирующего коэффициента

$$k = 4 / 4,0257 = 0,9936.$$

Скорректированные значения сезонной компоненты S_i получаются при умножении ее средней оценки $\bar{S}_i$ на корректирующий коэффициент k.

Проверяем условие равенство 4 суммы значений сезонной компоненты:

$$0,5779+0,6128+1,3901+1,4192=4.$$

Шаг 3. Разделим каждый уровень исходного ряда на соответствующие значения сезонной компоненты. В результате получим величины $T \cdot E = Y/S$ (столбец 4 таблицы 18), которые содержат только тенденцию и случайную компоненту.

Таблица 18

t	y_t	S_i	y_t/S_i	T	$T \cdot S$	$E = y_t/(T \cdot S)$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	375	0,5779	648,9012	654,9173	378,4767	0,9908
2	371	0,6128	605,4178	658,1982	403,3439	0,9198
3	869	1,3901	625,1349	661,4791	919,5221	0,9451
4	1015	1,4192	715,1917	664,7600	943,4274	1,0759
5	357	0,5779	617,7539	668,0409	386,0608	0,9247
6	471	0,6128	768,6031	671,3218	411,3860	1,1449
7	992	1,3901	713,6177	674,6027	937,7652	1,0578
8	1020	1,4192	718,7148	677,8836	962,0524	1,0602
9	390	0,5779	674,8572	681,1645	393,6450	0,9907
10	355	0,6128	579,3081	684,4454	419,4281	0,8464
11	992	1,3901	713,6177	687,7263	956,0083	1,0377
12	905	1,4192	637,6832	691,0072	980,6774	0,9228
13	461	0,5779	797,7159	694,2881	401,2291	1,1490
14	454	0,6128	740,8616	697,5690	427,4703	1,0621
15	920	1,3901	661,8229	700,8499	974,2515	0,9443
16	927	1,4192	653,1849	704,1308	999,3024	0,9277

Шаг 4. Определим компоненту T в мультипликативной модели. Для этого рассчитаем параметры линейного тренда методом наименьших квадратов, используя в качестве факторной переменной время, выраженное в единицах временного лага, а в качестве отклика уровни $T \cdot E$ (столбец 4 таблицы 18). В результате получим уравнение тренда:

$\hat{T} = 651,6364 + 3,2809 \cdot t$.

Подставляя в это уравнение значения $t = 1, 2, ..., 16$, найдем уровни T для каждого момента времени (столбец 5 таблицы 18).

Шаг 5. Найдем уровни ряда, умножив значения T на соответствующие значения сезонной компоненты (столбец 6 таблицы 18).

На рис.15 представлены фактические значения уровней временного ряда и расчетные, полученные посредством мультипликативной модели.

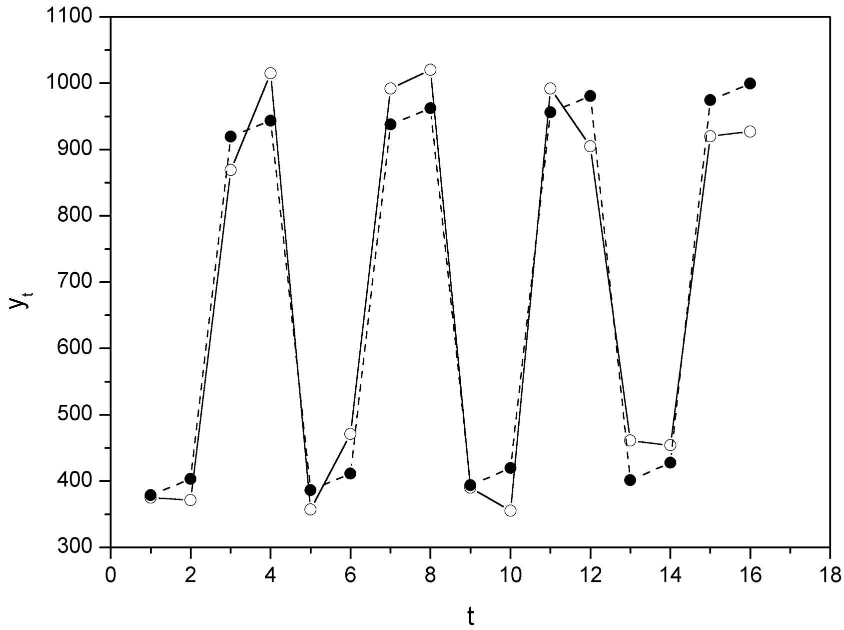


Рис. 15. Фактические и расчетные данные

Расчет ошибки в мультипликативной модели производится по формуле:

$E = Y / (T \cdot S)$.

Так же как и в случае аддитивной модели, оценку качества можно осуществить по величине индекса детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_t - T \cdot S)^2}{\sum (y_t - \bar{y})^2} = 1 - \frac{43065,02}{1252743,75} = 0,966.$$

Сравнивая показатели детерминации аддитивной и мультипликативной моделей, делаем вывод, что они примерно с одинаковой точностью аппроксимируют исходные данные.

Шаг 6. Прогнозирование по мультипликативной модели. Если предположить, что по нашему примеру необходимо дать прогноз об общем объеме правонарушений на I и II кварталы 2003 года, прогнозное значение Y_t уровня временного ряда в мультипликативной модели есть произведение трендовой и сезонной компонент. Для определения трендовой компоненты воспользуемся уравнением тренда

$T = 651,6364 + 3,2809 \cdot t$.

Получим

$T_{17} = 651,6364 + 3,2809 \cdot 17 = 707,4117$;

$T_{18} = 651,6364 + 3,2809 \cdot 18 = 710,6926$.

Значения сезонных компонент за соответствующие кварталы равны: $S_1 = 0,5779$ и $S_2 = 0,6128$. Таким образом

$Y_{17} = T_{17} \cdot S_1 = 707,4117 \cdot 0,5779 \approx 409$;

$F_{18} = T_{18} \cdot S_2 = 710,6926 \cdot 0,6128 \approx 436$.

Т.е. в первые два квартала 2003 г. следует ожидать порядка 409 и 436 правонарушений соответственно.

Таким образом, аддитивная и мультипликативная модели дают очень близкие результаты и по прогнозу. Различие составляет менее 4%.

При решении многих практических задач управления экономическими объектами оказывается важным установить наличие или отсутствие связи между изменениями соответствующих уровней двух или более временных рядов. Далеко не всегда это является очевидным, ибо близость, или даже совпадения трендовых составляющих, не гарантируют сущностной связи между уровнями временных рядов, которая имеет разумную экономическую интерпретацию. Изменения нефтяных котировок на мировых рынках и колебания курса рубля по отношению к доллару США имеют практически одинаковый тренд, что легко объясняется структурными особенностями экономики России и принятым порядком расчетов за углеводороды. Однако, например, изменение числа мест в детских дошкольных учреждениях города и количества автомобилей, находящихся в личном пользовании, тоже имеют близкие тренды, хотя вряд ли стоит пытаться обосновать связь между данными рядами и дать этому факту содержательную трактовку.

Рассмотрим приемы, с помощью которых может быть выявлено различие между истинной связью уровней временных рядов и случайным совпадением их трендов.

Первый из этих приемов основан на исключении влияния тренда. Подобно тому, как влияние циклической составляющей устраняется путем применения процедуры сглаживания, влияние тренда удается устранить посредством перехода к новым переменным. С этой целью для каждого из рядов строятся регрессионные зависимости с временем, выраженным в лаговых единицах, в качестве факторной переменной $\hat{x}_t = f(t);\ \hat{y}_t = g(t)$ и формируются два новых ряда $\varepsilon_t^x = x_t - \hat{x}_t;\ \varepsilon_t^y = y_t - \hat{y}_t$. Фактически это элементы, используемые для вычисления остаточной суммы квадратов отклонений регрессионных моделей. Трендовая компонента, присутствующая в рядах $x_t;\ y_t$, в рядах $\varepsilon_t^x;\ \varepsilon_t^y$ исключена, что легко проверяется по величине коэффициентов автокорреляции первого порядка. Если при этом коэффициент детерминации преобразованных рядов равен или близок по величине коэффициенту детерминации исходных рядов $(r_{\varepsilon^x \varepsilon^y} \approx r_{xy})$, признается наличие существенной связи между рядами и взаимной обусловленности их уровней в соответствующие моменты времени. Описанный алгоритм носит название *метода отклонения от тренда*.

Другой прием основан на изучении связи уровней исходных временных рядов при элиминировании фактора времени. Это достигается за счет включения времени в состав регрессионного уравнения на правах самостоятельной независимой переменной. То есть, исходя из априорной информации и соображений экономической целесообразности, выбирается какая либо переменная в качестве результативной и строится регрессионная модель вида

$$\hat{y}_t = b_0 + b_1 x_t + b_2 t \,, \tag{1.35}$$

параметры, которой находятся с помощью обычного МНК.

Преимущество такой модели по сравнению с методом отклонения от тренда в том, что она позволяет более полно учесть и проанализировать информацию, содержащуюся в имеющихся наблюдениях. Не следует, разумеется, противопоставлять эти методы друг другу, поскольку наилучший эффект достигается при их совместном применении.

Проиллюстрируем механизм действия этих методов на конкретном примере.

Пример 11. В таблице 19 приведены материалы десятилетних наблюдений по одному из субъектов РФ, содержащие данные об общих объемах инвестиций в экономику x_t (млрд. руб.) и объемах капитального строительства y_t (млрд. руб.).

Таблица 19

год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_t	38	43	52	54	50	57	59	63	66	70
y_t	11	12	15	15	13	16	16	17	18	20

С помощью метода отклонения от тренда требуется установить наличие или отсутствие взаимосвязи между уровнями временных рядов объемов инвестиций и капитального строительства; построить регрессионную модель, включив в ее состав время, как независимую переменную.

Вычислим коэффициенты автокорреляции первого порядка для обоих рядов и коэффициент детерминации между рядами $r_x^1 = 0{,}900;\ r_y^1 = 0{,}781;\ r_{xy}^2 = 0{,}970$. Они свидетельствуют о сильном влиянии трендовых составляющих в формировании уровней обоих рядов и их значительной коррелированности, т. е. о практически идентичном действии трендов. Для устранения влияния трендов строим регрессионные модели вида

$\hat{x}_t = a_0 + a_1 t$ и $\hat{y}_t = b_0 + b_1 t$.

Используя обычный метод наименьших квадратов, получим

$\hat{x}_t = 37{,}667 + 3{,}150t \quad r_{xt}^2 = 0{,}925$ и $\hat{y}_t = 10{,}667 + 0{,}842t \quad r_{yt}^2 = 0{,}860$.

Реализуя метод отклонения от тренда, рассчитаем с помощью полученных моделей значения уровней обоих рядов и найдем величины остатков. В таблице 20 представлены результаты вычислений.

Таблица 20

год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{x}_t$	40,8	44,0	47,1	50,3	53,4	56,6	59,7	62,9	66,0	69,2
$\hat{y}_t$	11,5	12,4	13,2	14,0	14,9	15,7	16,6	17,4	18,2	19,1
$\varepsilon_t^x = x_t - \hat{x}_t$	-2,8	-1,0	4,9	3,7	-3,4	0,4	-0,7	0,1	0,0	0,8
$\varepsilon_t^y = y_t - \hat{y}_t$	-0,5	-0,4	1,8	1,0	-1,9	0,3	-0,6	-0,4	-0,2	0,9

Вычислим коэффициенты автокорреляции первого порядка для рядов остатков $r_{\varepsilon_t^x}^1 = 0{,}02;$ $r_{\varepsilon_t^y}^1 = -0{,}129$. Их значения крайне невелики, что указывает на устранение влияния трендовых составляющих в этих рядах. Найдем, наконец, коэффициент детерминации между рядами остатков $r_{\varepsilon_t^x \varepsilon_t^y}^2 = 0{,}845$. Его значение осталось достаточно высоким, т. е. даже после элиминирования влияния трендов связь между уровнями преобразованных рядов осталась тесной, что свидетельствует о ее сущностном характере.

В заключение исследования, приняв в качестве результативного признака y_t, построим регрессионную модель (1.35), используя матричную схему метода наименьших квадратов (1.4).

$\hat{y}_t = -3{,}234 + 0{,}369x_t - 0{,}334t$.

Полученные результаты указывают на то, что увеличения общего объема инвестиций на 1 млрд. руб. увеличивает объемы капитального строительства в среднем на 369 млн. руб. при сохранении неизменной тенденции. Влияние же всех остальных факторов противоположно и снижает объемы капитального строительства в среднем на 334 млн. руб. в год.

Применение рассмотренных процедур, как и всех прочих в эконометрических исследованиях, возможно только при отсутствии автокорреляции в остатках, что является одной из базовых предпосылок регрессионного анализа. Это значит, что проверка взаимосвязи временных рядов методом отклонения от тренда должна быть дополнена проверкой отсутствия автокоррелированности остатков. Это осуществляется либо построением графика зависимости остатков, аналогичным графикам на рис.4, и принятием решения по визуальному впечатлению, либо с помощью *критерия Дарбина-Уотсона* по величине

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2}, \tag{1.36}$$

которая есть отношение суммы квадратов разностей остатков соседних уровней временного ряда к остаточной сумме квадратов модели регрессии.

Коэффициент автокорреляции остатков первого порядка вычисляется по формуле

$$r_\varepsilon^1 = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}_t\right)\cdot\left(\varepsilon_{t-1} - \bar{\varepsilon}_{t-1}\right)}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n}\left(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}_t\right)^2 \cdot \sum_{t-2}^{n}\left(\varepsilon_{t-1} - \bar{\varepsilon}_{t-1}\right)^2}}, \tag{1.37}$$

где $\bar{\varepsilon}_t = \frac{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t}{n-1}$; $\bar{\varepsilon}_{t-1} = \frac{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_{t-1}}{n-1}$ и они, в соответствии с предпосылками МНК, равны нулю с точностью до ошибки округления.

Если число наблюдаемых уровней временного ряда достаточно велико, то можно положить $\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2 \approx \sum_{t=2}^{n}\varepsilon_{t-1}^2$, что позволит формулу (1.37) преобразовать к виду

$$r_\varepsilon^1 \approx \frac{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2}. \qquad (1.38)$$

Раскрывая скобки в числителе формулы критерия Дарбина-Уотсона (1.36), получим

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2 - 2\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \sum_{t=2}^{n}\varepsilon_{t-1}^2}{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2}.$$

С учетом сделанных замечаний и соотношения (1.38) имеем окончательный вид формулы для вычисления критерия Дарбина-Уотсона

$$d \approx \frac{2\cdot\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2 - 2\cdot\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2} = 2\cdot\left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2}\right) = 2\cdot\left(1 - r_\varepsilon^1\right). \qquad (1.39)$$

Таким образом, если в остатках проявляется полная положительная автокорреляция и $r_1 = 1$, то $d = 0$. Если в остатках полная отрицательная автокорреляция, то $r_1 = -1$ и, следовательно, $d = 4$. Если автокорреляция остатков отсутствует, то $r_1 = 0$ и $d = 2$, т.е. $0 \le d \le 4$.

Алгоритм выявления автокорреляции остатков на основе критерия Дарбина-Уотсона следующий. Выдвигается гипотеза H_0 об отсутствии автокорреляции остатков. Альтернативные гипотезы H_1 и H_1^* состоят, соответственно, в наличии положительной или отрицательной автокорреляции в остатках. С помощью специальных таблиц определяются критические значения d_L и d_U для заданного числа наблюдений n, числа независимых переменных модели m и уровня значимости α. Используя эти значения, числовой промежуток $[0;\ 4]$ разбивают на пять отрезков и, в зависимости от того, какому из них будет принадлежать вычисленное по формуле (1.39) значение d, выносится суждение о наличии или отсутствии автокорреляции остатков.

$0 < d < d_L$ – есть положительная автокорреляция остатков, H_0 отклоняется, с вероятностью $P = 1 - \alpha$ принимается H_1;

$d_L < d < d_U$ – зона неопределенности;

$d_U < d < 4 - d_U$ – нет оснований отклонять H_0, т.е. автокорреляция остатков отсутствует;

$4 - d_U < d < 4 - d_L$ – зона неопределенности;

$4 - d_L < d < 4$ – есть отрицательная автокорреляция остатков, H_0 отклоняется, с вероятностью $P = 1 - \alpha$ принимается H_1^*.

Если вычисленное значение критерия Дарбина-Уотсона попадает в одну из зон неопределенности, то при решении практических задач предполагается наличие автокорреляции.

Пример 11. (продолжение) Проверим гипотезу о наличии автокорреляции в остатках для линейных регрессионных моделей, полученных в ходе реализации метода отклонения от тренда: $\hat{x}_t = 37{,}667 + 3{,}15t$ и $\hat{y}_t = 10{,}667 + 0{,}842t$. Коэффициенты автокорреляции первого порядка для рядов остатков этих моделей равны соответственно $r^1_{\varepsilon_x} = 0{,}02$ и $r^1_{\varepsilon_y} = -0/129$. Находя для них по формуле (1.39) значения критериев Дарбина-Уотсона, получим $d_x = 1{,}96;$ $d_y = 2{,}258$. Для обеих моделей $n = 10;$ $m = 1$. Табличные значения критерия для определения границ отрезков равны $d_L = 0{,}88;$ $d_U = 1{,}32$.Таким образом, интервал $[0; d_L] = [0;\ 0{,}88]$;

интервал $\left[d_L;d_U\right]=\left[0{,}88;1{,}32\right]$; интервал $\left[d_U;4-d_U\right]=\left[1{,}32;2{,}68\right]$; интервал $\left[4-d_U;4-d_L\right]=\left[2{,}68;3{,}12\right]$ интервал $\left[4-d_L;4\right]=\left[3{,}12;4\right]$. Для обеих моделей расчетные значения критериев Дарбина_Уотсона попадают в область, где нет оснований отвергать гипотезу об отсутствии автокорреляции в остатках. Следовательно, применение метода отклонения от тренда рядов примера 11 было легитимным.

Задачи для самостоятельного решения

№25. В таблице приведены сведения о потреблении электроэнергии жителями города по кварталам y_t млн. кВт.ч, собранные по результатам четырехлетних наблюдений.

№ квартала t	потребление эл. энергии y_t	№ квартала t	потребление эл. энергии y_t
1	5,5	9	8,0
2	4,6	10	5,6
3	5,0	11	6,4
4	9,2	12	10,9
5	7,1	13	9,1
6	5,1	14	6,4
7	5,9	15	7,2
8	10,0	16	11,0

Построить автокорреляционную функцию и сделать вывод о наличии сезонных колебаний потребления электроэнергии; элиминировать сезонную составляющую; построить аддитивную и мультипликативную модели ряда потребления электроэнергии; сделать прогноз потребления электроэнергии на следующий год по кварталам. Трудоемкость – 60 (мин/раб) эксперта.

№26. В таблице приведены сведения об объемах продаж товаров повседневного спроса x_t в процентах к предшествовавшему периоду, собранные по результатам ежеквартальных наблюдений в течении пяти лет.

№ квартала t	объем продаж x_t	№ квартала t	объем продаж x_t
1	100	11	98,7
2	93,7	12	101,8
3	96,5	13	112,9
4	102,1	14	98,4
5	107,9	15	97,4
6	96,4	16	102,2
7	95,8	17	98,2
8	98,3	18	83,5
9	104,2	19	84,6
10	99	20	89,0

Найти коэффициенты автокорреляции ряда продаж до четвертого порядка включительно; построить аддитивную и мультипликативную модели; сделать прогноз объемов продаж на следующий год по всем кварталам. Трудоемкость – 100(мин/раб) эксперта.

№27. По материалам ежеквартальных отчетов службы занятости курортного города за пять лет был получен временной ряд безработицы G, выраженный в процентах к общему количеству экономически активного населения, и получена его мультипликативная модель $G = 9{,}1 - 0{,}25t$. Скорректированные значения сезонной компоненты по кварталам: первый квартал – 1,4; второй квартал - 0,9; третий квартал – 0,7.

Найти значение сезонной компоненты за четвертый квартал; сделать прогноз уровня безработицы по всем кварталам следующего года. Трудоемкость – 10 (мин/раб) эксперта.

№28. В таблице представлены данные о среднемесячной величине совокупного дохода x_t тыс. руб. и величине потребительских расходов y_t тыс.руб., полученные по результатам восьмилетних наблюдений.

Год	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	7	8	8	10	11	12	14	16
x_t	10	12	11	12	14	15	17	20

Методом отклонений от тренда проверить наличие связи между рядами x_t и y_t; построить регрессионную модель, включив в нее фактор времени, и, взяв в качестве результативного признака y_t. Трудоемкость – 60 (мин/раб) эксперта.

№29. В таблице приведены сведения службы занятости об изменении уровня безработицы G в процентах к общему количеству экономически активного населения в течении года.

месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G %	8,8	8,6	8,4	8,1	7,9	7,6	7,4	7,1	6,5	6,0	5,4	4,6

Вычислить коэффициенты автокорреляции первого и второго порядка; построить модели линейного и экспоненциального трендов; сравнить их по величинам коэффициентов детерминации. Трудоемкость – 50 (мин/раб) эксперта.

№30. В таблице представлены данные десятилетних наблюдений за изменениями стоимости основных фондов фирмы x_t млн. руб. и объемов внешних заимствований y_t млн.руб.

год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_t	72	75	77	77	79	81	78	80	81	83
y_t	4,2	3,1	2,5	2,1	1,9	1,7	1,8	1,6	1,7	1,6

Методом отклонения от тренда оценить тесноту связи между рядами x_t и y_t; С помощью критерия Дарбина-Уотсона подтвердить или опровергнуть гипотезу об автокорреляции остатков. Трудоемкость – 50 (мин/раб) эксперта.

Раздел 2. Теоретико-экономические модели

Развитие экономической теории неразрывно связано с развитием самой экономики. По мере накопления опыта хозяйственной деятельности, появления и развития новых форм экономической активности, все более очевидной становилась необходимость научного осмысления и обобщения фактического материала, поиск объективных законов, управляющих экономическими процессами. Всплеск интереса к экономической науке в конце восемнадцатого начале девятнадцатого века после появления замечательных работ А. Смита и Д. Рикардо привел к появлению множества экономических теорий, утопий, фантазий и сделал неизбежным появление математических моделей, как обязательного инструмента анализа экономических явлений. В настоящее время, математическое моделирование экономических процессов является бурно и успешно развивающейся отраслью экономической науки, которая включает в себя модели производства и потребления, модели экономического роста, балансовые модели, эколого-экономические модели, модели инфляции, модели динамики государственного долга, теоретико-игровые модели и многое другое. Каждая из упомянутых тем посвящено множество журнальных публикаций, монографий, диссертаций. Отбор моделей в состав данного пособия производился с учетом трех обстоятельств. Во-первых, предпочтение отдавалось наиболее широко известным моделям, которые занимают прочное место в современной классической экономической теории. Во-вторых, с помощью представленных здесь моделей была предпринята попытка по возможности более полно охватить предметную область и познакомить с типичными приемами экономико-математического моделирования. В-третьих, все модели, собранные в настоящем пособии, используются или могут быть использованы для решения управленческих задач.

2.1. Модели потребления и производства

Предметом экономической науки является триединый процесс производства, распределения и потребления, материальных благ. Независимо от общественно – политической формации определяющим является блок распределительных функций. Можно уверенно утверждать, что механизм распределения решающим образом влияет как на производство, так и на потребление благ.

В настоящее время, однако, математическая теория экономики в совокупности всех трех ее сторон отсутствует. Сложность экономической системы, даже с учетом упрощающих предположений и формализующих идеализаций, существенно превышает порог, до которого строится точная теория как математическое понятие. Слишком велик набор существенных факторов, пренебрежение которыми невозможно без ущерба для содержательного смысла модели. Это превращает модель в крайне громоздкую конструкцию мало пригодную для продуктивного анализа объекта моделирования.

Такое положение дел привело к возникновению идеи построения экономико–математических моделей без учета механизма распределения. Эта, парадоксальная на первый взгляд, идея по мере своего развития, оформилась в богатую математическую теорию оптимальной экономики. В рамках настоящей главы будут определены некоторые базовые понятия и при достаточно общих предположениях рассмотрены математические модели потребления и производства.

Потребитель и его поведение

Пусть имеется **n** товаров. Обозначим количество i-ого товара x_i $i = \overline{1,n}$. Тогда векторная величина $x = (x_1, x_2, ...x_n)$ имеет смысл некоторого набора товаров. Ясно, что $x_i \geq 0$ для $\forall i = \overline{1,n}$.. Обозначим символом C пространство всех наборов товаров, т.е. $C = \left\{x \in R^n : x \geq 0\right\}$. Это линейное векторное пространство, по определению обладающее свойствами:

1. $x + y \in C$ для $\forall x \in C$ и $\forall y \in C$;

2. Если $x \in C$, то $\lambda x \in C$, где λ - произвольное число;

3. $\alpha x + (1-\alpha) y \in C$, для $\forall x \in C$, $\forall y \in C$ и $0 \le \alpha \le 1$. Стоимость единицы i-ого товара, т.е. его цену обозначим P_i. Очевидно, что вектор $P = (P_1, P_2, ...P_n)$ также неотрицателен. Скалярное произведение вектора товаров на вектор цен $\langle P, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$ называется ценой набора товаров. Поведение потребителя, т.е. лица, использующего товарные наборы, определяется аксиомой потребителя, которая утверждает следующее: каждый потребитель принимает решение о потреблении тех или иных товаров, исходя из своей собственной системы предпочтений. Именно этим обстоятельством определяется выгодность рыночных отношений товарообмена. Два любых товарных набора могут находиться по отношению друг к другу в одном из трех состояний:

1. Отношение слабого предпочтения – $x \ge y$ – потребитель предпочитает набору y набор x или не делает различия между ними;

2. Отношение безразличия – $x \sim y$ – потребитель не делает различия между наборами x и y;

3. Отношение сильного предпочтения – $x > y$ – потребитель предпочитает набору y набор x.

Назовем доходом некоторую фиксированную сумму денег Q, которую потребитель предполагает израсходовать на приобретение товаров.

Определение. Множество наборов товаров, стоимость которых при данном векторе цен P не превышает величины дохода Q называется бюджетным множеством и обозначается B. Оно явно зависит от дохода Q и вектора цен P, поэтому $B = B(P, Q)$. Множество товарных наборов, стоимости которых равны величине дохода определяет границу бюджетного множества и обозначается G. Таким образом

$$B(P,Q)=\{x\in C:\langle P,x\rangle \le Q\},\ G(P,Q)=\{x\in C:\langle P,x\rangle = Q\}. \quad (2.1)$$

Пример12. Пространство C образовано наборами двух товаров, цены которых $P_1 = 4$ д.е. ; $P_2 = 10$ д.е. Величина дохода $Q = 100$ д.е. В этом случае бюджетное множество $B(P,Q)$ будет представлять треугольник ограниченный осями x_1 и x_2 и прямой, проходящей, через точки $A = (25,0)$ – вся сумма дохода использована для приобретения товара 1; $B = (0,10)$ – вся сумма дохода использована для приобретения товара 2. Уравнение этой прямой имеет вид: $10x_1 + 25x_2 = 250$. Отрезок прямой между точками A и B есть граница бюджетного множества.

Бюджетное множество обладает тремя важными свойствами:

1. Выпуклость - для ∀ двух товарных наборов $x\in B$ и $y\in B$ и $0 \le \alpha \le 1$ $[\alpha x + (1-\alpha)y]\in B$.

2.Ограниченность – ни один из товарных наборов, входящих в состав бюджетного множества не содержит бесконечно больших элементов.

3.Замкнутость – любая последовательность товарных наборов $\{x^k\}k = \overline{1,\infty}$, из бюджетного множества сходится к вектору $z\in B$.

Поставим в соответствии каждому товарному набору x некоторое число $U(x)$, т.е. определим функцию $U: C \to R$, такую, что $U(x) \ge U(y)$ при $x \ge y$ и $U(x) > U(y)$, если $x \ne y$. Определенная таким образом функция называется <u>функцией полезности.</u> Поскольку областью ее изменения является числовая ось, а не векторное пространство, она значительно более удобна для оценки предпочтительности товарных наборов. Укажем свойства функции полезности.

1. Функции полезности неубывающая – свойство непосредственно вытекает из определения функции полезности и фактически означает, что набор, содержащий большее количество товаров обладает большей полезностью.

2. Если функция полезности дифференцируема, то $\frac{\partial U}{\partial x_i} > 0$ для $\forall\, i = \overline{1,n}$. Это свойство конкретизирует положение свойства 1 для дифференцируемых функций. Экономически это свойство означает «ненасыщаемость», т.е. предпочтительность большего количества товаров не зависимо от имеющегося в наличии. Величина $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ называется <u>предельной полезностью</u> i-ого товара и показывает на сколько изменяется значение функции полезности при изменении i-ой компоненты вектора товарного набора на единицу. Вектор $grad\quad U = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ указывает направление наискорейшего роста функции полезности.

3. Функция полезности вогнута, т.е. $U\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) > \lambda U(x) + (1-\lambda) U(y)$ для $\forall x \in C$, $\forall y \in C$ и $0 \le \lambda \le 1$. Математическим признаком, позволяющим проверить вогнутость функции, является отрицательная определенность <u>матрицы Гессе</u> $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \cdot \partial x_j}\right)_{n\times n}$ во всех точках области определения функции полезности. В экономике это свойство называется <u>законом Госсена,</u> или <u>убывающей предельной</u> полезности, который гласит, что с увеличением объема потребления любого товара полезность каждой последующей его единицы уменьшается.

Пример 13. Пусть пространство C содержит два товара. Проверим, что неоклассическая функция полезности $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$ $\alpha > 0$; $\beta > 0$; $\alpha + \beta < 1$ удовлетворяет всем заявленным свойствам. $\frac{\partial U}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} > 0$ для любых положительных наборов x_1 и x_2, и аналогично $\frac{\partial U}{\partial x_2} = \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} > 0$, что доказывает свойство «ненасыщаемости». Вычислим вторые производные функции полезности

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}=\alpha\left(\alpha-1\right)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta};\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}=\beta\left(\beta-1\right)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2};\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\cdot\partial x_2}=$$

$$=\frac{\partial^2 U}{\partial x_2\cdot\partial x1}=\alpha\beta x_1^{\alpha-1}\cdot x_2^{\beta-1}.$$

Формируем матрицу Гессе

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\cdot\partial x_j}\right)_{2\times 2}=\begin{pmatrix}\alpha\left(\alpha-1\right)x_1^{\alpha-2}\cdot x_2^{\beta} & \alpha\beta x_1^{\alpha-1}\cdot x_2^{\beta-1}\\ \alpha\beta x_1^{\alpha-1}\cdot x_2^{\beta-1} & \beta\left(\beta-1\right)x_1^{\alpha}\cdot x_2^{\beta-2}\end{pmatrix}$$

Вычислением определителя этой матрицы легко установить ее отрицательную определенность.

Задачей потребителя является отыскание вектора набора товаров $x=\left(x_1,x_2,....x_n\right)$, максимизирующего функцию полезности $U\left(x\right)$ при бюджетном ограничении $\left\langle P,x\right\rangle\le Q$ и $x\ge 0$. Это типичная задача математического программирования вида

$$\max U\left(x_1,x_2,...x_n\right)$$

$$P_1x_1+P_2x_2+...P_nx_n\le Q\quad x_i\ge 0\quad i=\overline{1,n}$$

Теорема. Решение задачи потребителя существует и лежит на границе бюджетного множества.

☐ Так как бюджетное множество замкнуто и ограничено, а функция полезности $U(x)$ непрерывна, то в соответствии известной из математического анализа теоремы Вейерштрасса, она достигает на этом множестве своего наибольшего и наименьшего значения, что доказывает существование решения задачи. Пусть вектор x^* является решением задачи потребителя, т.е. $U\left(x^*\right)=\max U\left(x\right)$. Предположим, что $x^*\notin G$. Это значит, что $\left\langle P,x^*\right\rangle<Q$. Следовательно, у потребителя остались средства в количестве $Q-\left\langle P,x^*\right\rangle$, на которые может быть приобретен дополнительный набор товаров, характеризуемый вектором $z\in B$. Рассмотрим вектор товарного набора $y=x^*+z$.

Очевидно, что $\langle P, y\rangle \le Q$, поэтому $y \in B$. Однако, поскольку функция полезности неубывающая, из того, что $y > x^*$ следует $U(y) > U(x^*)$, а значит вектор x^* не является решением задачи потребителя. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы. ⌧

Замечание. Если функция полезности строго вогнута, то решением задачи потребителя будет единственная точка границы бюджетного множества.

Таким образом, в уточненной постановке задача потребителя имеет вид $\max U(x)$ при $\langle P, x\rangle = Q;$ $x \ge 0$. Точка условного максимума функции $U(x), -x^*$, координаты, которой определяют состав товарного набора, называется точкой спроса. Решение задачи проще всего получить методом неопределенных множителей Лагранжа и вместо условного максимума функции полезности $U(x)$ найти безусловный максимум функции Лагранжа $L(x,\lambda) = U(x) + \lambda\left(Q - \langle P, x\rangle\right)$, где λ – число, подлежащее определению в процессе решения. Использование необходимого условия существования экстремума функции многих переменных приводит к системе $n+1$ уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda P_i \quad i = \overline{1,n} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i x_i = Q \end{cases}, \tag{2.2}$$

решение которой позволяет установить координаты точки спроса $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ...x_n^*\right)$. Заметим, что в точке спроса отношение предельной полезности любого элемента товарного набора к его цене есть величина постоянная и равная λ

$$\frac{\partial u}{\partial x_i^*} / P_i = \lambda^* \quad i = \overline{1,n} \ .$$

Экономически это означает, что в точке спроса изменение цены на любой товар приводит к одинаковым изменениям предельных полезностей.

Пример 14. Найти точку спроса для неоклассической функции полезности $U(x_1, x_2,) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$. Если общее количество денег равно Q, а цены на товары соответственно P_1 и P_2, система уравнений Лагранжа (2.2) будет иметь вид

$$\begin{cases} \alpha x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\beta} = \lambda P_1 \\ \beta x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta-1} = \lambda P_2 \\ P_1 x_1 \cdot P_2 x_2 = Q \end{cases}.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим $\frac{\alpha}{\beta} \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{P_1}{P_2}$, откуда $x_2 = x_1 \frac{P_1}{P_2} \frac{\beta}{\alpha}$. Подставляя в третье уравнение, имеем $x_1^* = \frac{Q}{P_1} \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}$, и, соответственно $x_2^* = \frac{Q}{P_2} \frac{\beta}{(\alpha+\beta)}$.

Поведение производителя

В системе «потребление – производство» производитель всегда имеет подчиненную, хотя отнюдь не второстепенную, роль, т.к. свои цели он может реализовать только через потребителя, путем удовлетворения его запросов. Базовым положением, позволяющим сформулировать эти цели, является аксиома производителя: каждый производитель принимает решение, о производстве продукции только исходя из желания получить от этого наибольшую прибыль.

Пусть для изготовления товара Y используется m видов ресурсов $X_1, X_2, ...X_m$. Функция $f : X^m \to R$, ставящая в соответствие любому набору ресурсов наилучший, в некотором смысле объем выпуска товара y называется производственной функцией. Вектор $x = (x_1, x_2, ...x_m) \in X^m$ носит название вектора затрат. В классической и неоклассической экономической теории предполагается, что производственные функции обладают следующими свойствами:

1. $\frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0$ для $\forall \ i = \overline{1,m}$, т.е. производственная функция неубывающая по всем своим переменным. Экономически это означает, что увеличение любого элемента вектора затрат не приводит к уменьшению выпуска товара. В терминах экономической теории величина частной производной функции по i- ой составляющей вектора ресурсов называется предельным продуктом i - ого ресурса. Эта величина показывает, на сколько изменится объем выпуска товара при изменении количества i- ого ресурса на единицу;

2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0$ для $\forall \ i = \overline{1,m}$, что означает вогнутость производственной функции по всем своим переменным, иначе говоря, с увеличением любого элемента вектора ресурсов темп роста производственной функции замедляется. В экономике это свойство носит название убывающей отдачи, или убывающего предельного продукта и отражает хорошо известный факт снижения эффективности любого вида затрат по мере их наращивания. Т.е. введение каждой дополнительной единицы любого ресурса при неизменном количестве всех прочих ресурсов увеличивает объем выпуска товара все меньше и меньше.

Обозначим $P = \left(P_1, P_2, ...P_m\right)$- вектор цен, где $P_i \quad i = \overline{1,m}$ есть цены соответствующих элементов вектора ресурсов; v– стоимость единицы производимого товара. (Предполагается, что эти величины формируются в процессе действия рыночных механизмов и не могут быть изменены усилиями отдельного производителя). Тогда прибыль производителя, как функция вектора ресурсов, будет

$$w(x) = vy - \langle P, x \rangle = vf(x) - \langle P, x \rangle.$$

Линия оптимального поведения производителя, с учетом сформулированной выше аксиомы производителя, есть вектор ресурсов $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ...x_m^*\right)$, являющийся решением экстремальной задачи

$$\max w\left(x_1, x_2, \ldots. x_m\right) = vf\left(x_1, x_2, \ldots. x_n\right) - \sum_{i=1}^{m} P_i x_i \quad x_i \geq 0 \quad i = \overline{1,m} \quad (2.3)$$

Используя необходимое условие существования экстремуму функции многих переменных, получим систему уравнений $v\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = P_i \quad i = \overline{1,m}$, решая которую, находим все элементы вектора $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots. x_m^*\right)$. Точка x^* определяет вектор ресурсов, обеспечивающий выпуск товарной продукции в количестве $y^* = f\left(x^*\right)$, при котором достигается наибольшая величина прибыли $w\left(x^*\right)$. Для выяснения экономического содержания получаемых результатов запишем систему уравнений в виде $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \dfrac{P_i}{v} \quad i = \overline{1,m}$. Отсюда следует, что производитель будет предъявлять спрос на каждый ресурс и наращивать объемы производства до тех пор, пока величина предельного продукта по этому ресурсу не станет равна цене этого ресурса, выраженной в единицах цены производимого товара.

Пример 15. Объем добычи щебня в карьере y зависит от трудозатрат x как $y = 6\sqrt{x}$. Цена щебня $v = 40$ руб./тонну. Заработная плата одного рабочего $P = 30$ руб/час. Требуется определить максимальную прибыль от добычи щебня и требуемое для этого количество рабочей силы. Заметим, что производственная функция, устанавливающая соответствие между объемом добычи щебня и трудозатратами, удовлетворяет обоим заявленным свойствам производных функций:

1. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{1}{3\sqrt{x}} > 0$ для $\forall\, x > 0$;

2. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{6\sqrt{x^3}} < 0$ для $\forall\, x > 0$.

Величина прибыли составит $w = vy - px = 240\sqrt{x} - 30x$. Используя необходимое условие существования экстремума, получим уравнение для нахождения потребного количества рабочей силы $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{240}{2\sqrt{x}} - 30 = 0$. Отсюда количество рабочей силы, при котором прибыль карьера будет наибольшей, x^*=16 чел/час. При этом объем производства составит $y^* = 24$т/час, а прибыль $w^* = 480$ руб/час.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что потребность производителя в ресурсах полностью определяется ценами на них и ценой производимой продукции, т.е. $x_i^* = x_i^*\left(v, P_1, P_2, ...P_m\right)$ для $\forall$ $i = \overline{1,m}$. Подставляя объемы ресурсов, используемых для получения наибольшей прибыли, в выражение производственной функции, получим новую функцию, устанавливающую связь величины оптимального выпуска продукции с ценами.

$$y^* = f\left(x^*\left(v, P\right)\right) = q\left(v, P\right). \qquad (2.4)$$

Она носит название <u>функции предложения продукции.</u> Рассмотрим ее основные свойства.

1. Функция предложения продукции есть возрастающая функция цены товара v, т.е. $\frac{\partial q}{\partial v} > 0$. Экономически это означает, что рост цены на производимый товар влечет рост его предложения на рынке, что, в свою очередь, приводит к увеличению оптимальной величины его выпуска.

2. Величина оптимального потребления любого ресурса есть убывающая функция его цены, т.е. $\frac{\partial x_i^*}{\partial P_i} < 0$. Экономический смысл этого свойства отражает очевидный факт, что с увеличением стоимости ресурса спрос на него падает.

3. Связь величины спроса на ресурсы с ценой товара может быть различной. Если для некоторого ресурса $\frac{\partial x_i^*}{\partial v} > 0$, то увеличение цены товарной продукции повышает спрос на ресурс. Если же $\frac{\partial x_i^*}{\partial v_i} < 0$, то с ростом цены продукции спрос на ресурс уменьшается. Ресурсы такого типа называются малоценными.

4. $\frac{\partial q}{\partial P_i} = -\frac{\partial x_i^*}{\partial v}$, т.е. в зависимости от типа ресурса повышение цены продукции может, как увеличивать, так и снижать его потребление.

Это соотношение определяет основное свойство малоценных ресурсов: увеличение платы за малоценный ресурс приводит к увеличению выпуска продукции. Таким образом, основной стратегией разумно действующего экономиста-производственника является установление типов используемых ресурсов с тем, чтобы посредством управления ценами, добиться желаемого уровня производства.

Пример 16. Найти функцию спроса на ресурс и функцию предложения продукции фирмы, производственная функция которой задана выражением $y = \ln(x+1)$; цена продукции v; цена ресурса P. $(v > P)$. Используя условия максимизации прибыли, $v\frac{\partial y}{\partial x} = P$ получим $v\frac{1}{x+1} = P$, откуда функция спроса на ресурс $x^* = \frac{v}{P} - 1$. Подставив в выражение производственной функции значение x^*, получим функцию предложения продукции $x^* = q(v,P)$, $y^* = \ln\frac{v}{P}$. Проверим, что эта функция удовлетворяет всем заявленным свойствам. $\frac{\partial q}{\partial v} = \frac{\partial y^*}{\partial v} = \frac{1}{v} > 0$ для $\forall\, v > 0$. $\frac{\partial x^*}{\partial P} = -\frac{v}{P^2} < 0$ для $\forall\, v > 0$ и

$P > 0$. Заметим, что в рассматриваемом примере $\frac{\partial x^*}{\partial v} = \frac{1}{P} > 0$, для $\forall\, P > 0$, т.е. ресурс не является малоценным, а значит возрастание цены продукта будет стимулировать увеличение спроса на ресурс. И, наконец, $\frac{\partial q}{\partial P} = \frac{\partial y^*}{\partial P} = -\frac{1}{P}$, следовательно $\frac{\partial q}{\partial P} = \frac{\partial y^*}{\partial v}$.

Пример *17.* Объем сбыта продукции предприятия зависит от назначаемой цены v и определяется соотношением $y(v) = 28 - v$. Издержки являются функцией выпуска и выражаются как $I(y) = \frac{y^3}{3} - 6y^2 + 37y + 15$. Найти максимально возможную прибыль и определить, какие при этом будут объем производства и величина издержек. В рамках данной постановки задачи прибыль, как разность между доходом от продажи продукции и издержками, производителя определится соотношением $w = vy - I(y) = (28 - y)y - \left(\frac{y^3}{3} - 6y^2 + 37y + 15\right)$. Используя необходимое условие существования экстремума, получаем уравнение для нахождения объема производства, при котором достигается наибольшая прибыль $\frac{\partial w}{\partial y} = 28 - 2y - \left(y^2 - 12y + 37\right) = 0$, или $y^2 - 10y + 9 = 0$. Корнями этого уравнения являются числа $y_1 = 1$ и $y_2 = 9$ $w(y_1) = -19\frac{1}{3}$, что экономически абсурдно, следовательно, величина оптимального объема производства $y^* = 9$. Соответствующая этому объему производства величина издержек составляет $I\left(y^*\right) = 105$, а величина прибыли $w\left(y^*\right) = 66$.

2.2. Модели экономического равновесия и роста

Предметами математического моделирования в процессе изучения явлений экономического равновесия и роста принято считать объекты макроэкономики. В качестве таковых рассматриваются экономические системы отдельно взятых стран, имеющие в своем составе производственную сферу, финансово – кредитную сферу и рынки труда и капитала. Математическое моделирование призвано выяснить механизмы взаимодействия элементов макроэкономических систем; установить положения равновесия этих систем и оценить их устойчивость; указать факторы, характеризующие темпы роста экономики и определить возможности роста.

Производственные функции макроэкономических систем

Наиболее распространенной и естественной характеристикой качества функционирования макроэкономической системы служит величина валового национального продукта (ВНП). ВНП называется весь комплекс товаров и услуг, включая незавершенное производство, произведенных экономикой страны за некоторый отрезок времени. В макроэкономическом смысле объем ВНП зависит только от двух факторов производства: капитала и труда. Конкретной формой этой зависимости является производственная функция F, которая устанавливает связь между количеством капитала K и труда L, использованных в процессе экономической деятельности, и количеством произведенной продукции Y, характерную для данной экономической системы. Таким образом $Y = F(K, L)$. Известен достаточно широкий спектр функций, применяемых для описания зависимости ВНП от производственных факторов. Однако, в классической и неоклассической экономической теории нашли применение функции, обладающие двумя свойствами:

1. Свойство убывающего предельного продукта.
2. Свойство постоянной отдачи от масштаба.

Математические и экономические аспекты первого свойства подробно рассмотрены в разделе «Поведение потребителя», где показано, что это свойство предполагает вогнутость и неограниченное возрастание функции во всей области определения по каждой переменной. Что касается второго свойства, то оно задается соотношением $ZY = ZF(K,L) = F(ZK,ZL)$, где Z- произвольная постоянная. В математике эти функции известны под названием однородных функций первого порядка. Их особенность состоит в том, что изменение в некоторое число раз всех независимых переменных приводит к изменению во столько же раз значения функции. В соответствии со смыслом переменных, входящих в состав производственной функции, экономическое содержание свойства постоянной отдачи от масштаба состоит в том, что изменение в одно и то же число раз используемых в производстве капитала и труда влечет за собой изменение ВНП в такое же число раз. Однородные функции первого порядка примечательны еще одним отличием, формулируемым обычно в виде теоремы.

Теорема Эйлера. Однородная функция первого порядка $Y = F(K,L)$ допускает представление:

$$F(K,L) = K\frac{\partial F}{\partial K} + L\frac{\partial F}{\partial L} \tag{2.5}$$

□ В силу свойства однородности $ZF(K,L) = F(ZK,ZL)$. Обозначим $U = ZK$; $V = ZL$ и продифференцируем по Z обе части равенства, применив для правой части правило дифференцирования сложной функции $F(K,L) = \frac{\partial F}{\partial U}K + \frac{\partial F}{\partial V}L = \frac{\partial F}{\partial (ZK)}K + \frac{\partial F}{\partial (ZL)}L$.

Положив $Z = 1$, имеем $F(K,L) = \frac{\partial F}{\partial K}K + \frac{\partial F}{\partial L}L$ ⊠

Поведение фирмы в условиях совершенной конкуренции

Рассмотрим деятельность субъекта рыночной макроэкономической системы – производственного предприятия, в дальнейшем фирмы. Эта фирма производит продукцию в количестве Y, реализуя ее на рынке по цене P. В процессе производства используется капитал в количестве K, арендуемый на рынке капитала по цене R, и труд в количестве L, арендуемый на рынке труда по цене W. Сделаем несколько предварительных замечаний, формализующих структуру совершенной конкуренции.

1. Действия фирмы направлены на получение наибольшей прибыли.

2. Размеры фирмы малы по сравнению с размерами рынков. Экономически это означает, что фирма не может оказывать сколь-нибудь существенное влияние на цену, как собственной продукции, так и факторов производства.

3.Преобразование факторов производства в продукцию осуществляется фирмой посредством производственной функции с постоянной отдачей от масштаба единой для всей макроэкономической системы, в которой функционирует фирма. Содержательный смысл этого замечания представляет констатацию факта, что фирма не располагает какими либо неизвестными остальному экономическому сообществу технологиями, которые могли дать их обладателю преимущества в конкурентной борьбе.

В рамках данной постановки, экономическая прибыль фирмы П определится как разность между доходами от продажи произведенной продукции и платой за использованные факторы производства.

$$\prod = PY - KR - LW = PF\left(K,L\right) - KR - LW$$

Стремясь к максимизации прибыли, фирма будет предъявлять спрос на капитал и труд до тех пор, пока их наращивание будет сопровождаться увеличением прибыли. Используя необходимое условие существования экстремума функции многих переменных, определим предельные значения спроса на факторы производства и величину максимальной прибыли фирмы.

$$\frac{\partial \prod}{\partial K} = P\frac{\partial F}{\partial K} - R = 0; \quad \frac{\partial \prod}{\partial L} = P\frac{\partial F}{\partial L} - W = 0$$

и, следовательно

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{R}{P}; \quad \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{W}{P}.$$

Отсюда следует важный экономический вывод:

Фирма, ставящая своей целью максимизацию получаемой прибыли, наращивает факторы производства до тех пор, пока величина их предельного продукта не сравняется с ценой этих факторов, выраженной в единицах цены производимой продукции. Подставив эти цены в выражение для прибыли, получим максимальную величину прибыли

$$\prod_{\max} = PF(K,L) - P\frac{\partial F}{\partial K}K - P\frac{\partial F}{\partial L}L = P\left[F(K,L) - \frac{\partial F}{\partial K}K - \frac{\partial F}{\partial L}L\right]$$

но, согласно теореме Эйлера, $F(K,L) - \frac{\partial F}{\partial K}K - \frac{\partial F}{\partial L}L = 0$, а значит $\prod_{\max} = 0$.

В этом, парадоксальном, на первый взгляд, результате нет ничего необычного, так как он представляет всего лишь экономическое выражение всеобщего закона сохранения. Действительно, если в процессе производства используются два производственных фактора – капитал и труд, то произведенная продукция также должна распределяться только между этими факторами. Часть на восстановление выбывающего и создание нового капитала, часть на оплату труда. Следует заметить, что в условиях рыночной экономики большинство фирм являются собственниками используемого в производстве капитала. Это означает, что плата за аренду капитала фактически присваивается фирмой и перераспределяется по усмотрению владельцев контрольного пакета акций.

В достижении полученных результатов наиболее существенную роль играет свойство постоянной отдачи от масштаба производственной функции. Рассмотрим класс таких функций, обладающих еще одним интересным свойством. В процессе наблюдений за макроэкономическими системами было замечено, что отношение доли ВНП, присваиваемой капиталом, к доле ВНП идущей на оплату трудовых ресурсов есть величина примерно постоянная. Было высказано предположение, что это обстоятельство не случайно, а является следствием действия производственной функции специального вида. Аналитическое выражение функции с постоянной отдачей от масштаба, обеспечивающей постоянство отношения долей факторов производства в ВНП, при условии, что цена на эти факторы равна их предельным продуктам, было получено учеными Коббом и Дугласом. А функция названа в их честь производственной функцией Кобба-Дугласа. Она имеет вид $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, где $0<\alpha<1$; A – положительный коэффициент, учитывающий особенности макроэкономической системы. Покажем выполнение обоих заявленных свойств для этой функции

$$F\left(ZK, ZL\right) = A\left(ZK\right)^{\alpha}\left(ZL\right)^{1-\alpha} = AZK^{\alpha}L^{1-\alpha} = ZF\left(K, L\right),$$

что определяет свойство постоянной отдачи от масштаба. Если капитал получает величину своего предельного продукта, то его доля в ВНП Y_k будет $Y_k = K\dfrac{\partial F}{\partial K} = K\cdot\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \alpha AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$.

При том же предположение доля труда Y_L в ВНП $Y_L = L\dfrac{\partial F}{\partial L} = L\cdot\left(1-\alpha\right)AK^{\alpha}L^{-\alpha} = \left(1-\alpha\right)AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$.

Таким образом $\dfrac{Y_k}{Y_L} = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} = const$. Величина α имеет смысл эластичности продукции по капиталу, а $1-\alpha$ - эластичности продукции по труду.

Замечание. Поскольку на самом деле общество состоит не только из рабочих и предпринимателей, некоторая часть ВНП направляется на содержание общественных слоев не занятых в сфере материального производства. Учитывая это обстоятельство в практике экономических исследований, используют несколько модернизированную функцию Кобба-Дугласа вида $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где $\alpha+\beta\neq 1$, что позволяет предусмотреть участие непроизводственных структур в распределении ВНП.

Пример 18. Выпуск продукции заводом на сумму 10 млн. руб. обеспечивался основными фондами стоимостью 10 млн. руб. и рабочими в количестве 1000 человек. Экономисты подсчитали, что для увеличения объема выпуска на 1 млн. руб. необходимо приобрести оборудования на сумму 3 млн. руб. Установить вид производственной функции в предложении, что производимая продукция распределяется только между работниками завода и собственниками капитала. Запишем производственную функцию Кобба-Дугласа для обоих значений выпуска.

$$10^7 = A\cdot\left(10^7\right)^{\alpha}\cdot\left(10^3\right)^{1-\alpha};\quad 1{,}1\cdot10^7 = A\cdot\left(1{,}3\cdot10^7\right)^{\alpha}\cdot\left(10^3\right)^{1-\alpha}$$

Логарифмируя, получим

$$7 = \lg A + 7\alpha + 3\left(1-\alpha\right);\quad 7{,}0414 = \lg A + 7{,}1139\alpha + 3\left(1-\alpha\right)$$

Вычитаем первое уравнение из второго и находим $\alpha = 0{,}363$. Подставив в одно из уравнений, определим $\lg A = 2{,}548$, откуда $A \approx 353$. И, таким образом, производная функция будет $Y = 353K^{0{,}363}L^{0{,}637}$

Модель экономического роста Солоу

Рассмотрим макроэкономическую систему, в которой независимые производители, находящиеся в отношениях совершенной конкуренции, выпускают продукцию Y, используя капитал K и однородную рабочую силу L. Процесс преобразования производственных факторов в продукт осуществляется посредством производственной функции с постоянной отдачей от масштаба. Будем предполагать, что вся предполагаемая на рынке труда рабочая сила оказывается полностью востребованной, причем динамика изменения трудовых ресурсов соответствует динамике изменения народонаселения в целом. Принято считать, что в условиях внутри и внешнеполитической стабильности народонаселение страны экспоненциально возрастает с течением времени с темпом μ. Следовательно, в рамках сделанного предположения $L = L_0e^{\mu t}$, где t – временная переменная, а L_0 – трудовые ресурсы на момент начала наблюдения. В макроэкономическом понимании произведенный продукт распределяется на непроизводственное потребление в количестве C и на производственное потребление в количестве *I*, что предполагает использование его для создания нового капитала. Таким образом $Y = C + I$. Естественно, что все величины этого соотношения являются функциями времени. Назовем нормой сбережения и обозначим буквой s долю произведенной продукции, оставшейся после потребленного в непроизводственной сфере. Тогда $I = sY = sF(K,L)$; $C = (1-s)Y = (1-s)F(K,L)$. Процессу пополнения капитала за счет инвестиционных вложений в производство противоположен процесс амортизационного выбытия его вследствие физического и морального старения. В экономических исследованиях полагают, что потери капитала вследствие амортизации пропорциональны его количеству. Доля капитала h, теряемого в единицу времени называется нормой амортизации и считается постоянной. Таким образом, с учетом сделанных замечаний, процесс изменения количества капитала во времени может быть записан в виде $\Delta K = (sY - \mu K - hK) \cdot \Delta t$, откуда имеет место дифференциальное уравнение

$$\frac{dK}{dt} = sF(K,L) - (\mu + h)K, \quad K(0) = K_0 \tag{2.6}$$

Замечание. В моделях, описывающих поведение макроэкономической системы на длительном временном интервале, во второе слагаемое правой части уравнения (2.6) добавляется член δ, учитывающий фактор технологического прогресса, поскольку высокотехнологичный, наукоемкий капитал требует для своего создания значительно больших затрат нежели примитивный. Уравнение (2.5) при этом имеет вид

$$\frac{dK}{dt} = sF(K,L) - (\mu + h + \delta)K / \quad K(0) = K_0.$$

Однако, во-первых, объективную оценку фактора технологического прогресса дать весьма затруднительно, а во-вторых, введение дополнительного слагаемого не меняет содержательный смысл модели. Поэтому в дальнейшем изложении мы будем обращаться к уравнению (2.6).

Разделим обе его части на L. Тогда, учитывая свойство постоянной отдачи от масштаба производственной функции,

$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$. Обозначив $\frac{Y}{L} = y$ – производительность труда; $\frac{K}{L} = k$-капиталовооруженность, получим $\frac{dk}{dt} = sf(k) - (\mu + h)k, \quad k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0}$. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, решением которого является некоторое семейство кривых, называемых траекториями. Особый интерес представляют так называемые стационарные траектории, на которых значение капиталовооруженности постоянно. Экономически это означает, что удельные инвестиции $i = \frac{I}{L} = sf(k)$ полностью используются на покрытие амортизационного выбытия капитала и обеспечение стабильного уровня капиталовооруженности экспоненциально растущим трудовым ресурсам. Величина капиталовооруженности k^*, при которой достигается упомянутое равновесие, определяется решением алгебраического уравнения $sf(k) - (h + \mu)k = 0$. Оно существует и единственно, т.к. $f(k) = F(k, 1)$ монотонно возрастающая вогнутая функция, а $(h + \mu)k$ – линейная функция, и, как видно из рис. 16, они имеют единственную точку пересечения, которая определяет равновесное значение капиталовооруженности k^* и соответствующее равновесное значение производительности y^*.

Рассмотрим основные свойства стационарной траектории и положения равновесной капиталовооруженности, которое на этой траектории достигается. Согласно принятым обозначениям $k = \frac{K}{L}$. Полагая $k = k^*$, получим $K = k^* L$ в любой точке стационарной траектории, или, с учетом экспоненциального роста трудовых ресурсов во времени, $K = k^* L_0 e^{\mu t}$. Аналогичные рассуждения приводят к соотношениям $Y = f(k^*) L_0 e^{\mu t}$; $I = sf(k^*) L_0 e^{\mu t}$; $C = (1 - s) f(k^*) L_0 e^{\mu t}$. Таким образом, на стационарной траектории все макроэкономические показатели возрастают экспоненциально с темпом равным темпу роста трудовых ресурсов.

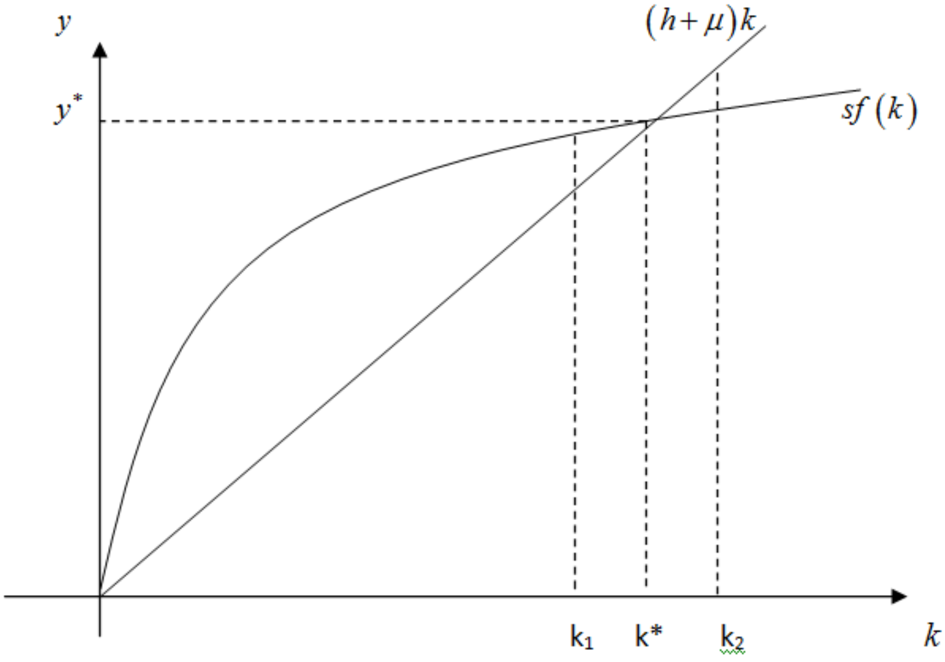


Рис.16. Точка равновесного значения капиталовооруженности

Важным свойством положения равновесной капиталовооруженности является его устойчивость. Опуская строгие определения, будем понимать под устойчивостью способность системы, выведенной из положения равновесия, с течением времени возвращаться в это положение только за счет структуры самой системы без воздействия извне. Пусть по каким то причинам величина капиталовооруженности изменилась и стала равна $k_1 < k^*$. Как видно на рис.16, в этой точке рост капиталовооруженности за счет инвестирования превосходит ее убыль вследствие амортизации и увеличения трудовых ресурсов $\frac{dk}{dt} > 0$ в точке k_1, т.е. капиталовооруженность растет, стремясь к равновесному значению k^*. Так же легко показать убывание капиталовооруженности в точке $k_2 > k^*$, откуда следует устойчивость положения равновесной капиталовооруженности. Практический вывод из этого результата состоит в том, что постоянство капиталовооруженности есть обязательное условие существования макроэкономической системы, как устойчивого образования. Изменение нормы сбережения изменяет только положение точки равновесия. При одинаковой норме сбережения в странах с более высоким темпом роста народонаселения равновесие устанавливается на более низком уровне капиталовооруженности и, соответственно более низком уровне производительности и удельного потребления.

Наиболее естественным критерием оценки эффективности функционирования макроэкономической системы является величина удельного потребления, достигаемого на стационарной траектории. Поэтому представляет интерес выяснить, при какой норме сбережения величина удельного потребления достигает своего наибольшего значения. Как было показано выше $c = (1 - s) f(k)$, но поскольку в состоянии равновесия $sf(k^*) = (h + \mu)k^*$, величина равновесного потребления $c^* = f(k^*) - (h + \mu)k^*$. Используя необходимый признак существования экстремума, находим условия, обеспечивающие максимум удельного потребления

$$\frac{dc^*}{dk^*} = \frac{df(k^*)}{dk^*} - (h + \mu) = 0, \text{ откуда } \frac{df(k^*)}{dk^*} = h + \mu.$$

Так как в силу построения функции $f(k)$ $\frac{df}{dk} = \frac{\partial F}{\partial K}$, то максимум удельного потребления достигается на такой стационарной траектории, где в точке равновесной капиталовооруженности величина предельного продукта равна сумме темпа амортизации капитала и темпа роста трудовых ресурсов. Норма сбережения, соответствующая такой траектории, называется золотой, а формирование макроэкономических показателей – золотым правилом экономического роста. Рассмотрим, как будет выглядеть это правило для производственной функции Кобба-Дугласа $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Разделив обе части равенства на L, получим $y = Ak^{\alpha}$. И из условия стационарной траектории $sAk^{\alpha} = (h + \mu)k$. Решение этого уравнения дает значение равновесной капиталовооруженности для функции Кобба-Дугласа.

$k^* = \left[sA / \left(h + \mu \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$; равновесной производительности

$y^* = Ak^{*\alpha} = A\left[\dfrac{sA}{h+\mu} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$; равновесной величины удельного потребления $C^* = \left(1-s\right) y^* = \left(1-s\right) A\left[\dfrac{sA}{h+\mu} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Вычисляя производную $\dfrac{dc^*}{ds}$ и приравнивая ее нулю, найдем значение золотой нормы сбережения $s^* = \alpha$. Таким образом норма сбережения, гарантирующая максимальное удельное потребление в условиях действия производственной функции Кобба-Дугласа, равна эластичности производства по капиталу.

Пример 19. Для производственной функции Кобба-Дугласа с параметрами $A = 10^3$ и $\alpha = 0,5$ найти значения равновесной капиталовооруженности, производительности и удельного потребления на стационарной траектории с параметрами $S = 0,2;\ \ h = 0,2;\ \ \mu = 0,05$. Для данного случая $y = 10^3 k^{\frac{1}{2}}$ и, используя полученные расчетные соотношения, вычислим $k^* = \left[\dfrac{0,2 \cdot 10^3}{0,2+0,05} \right]^{\frac{1}{0,5}} = 64 \cdot 10^4;\quad y^* = 10^3 \left[\dfrac{0,2 \cdot 10^3}{0,2+0,05} \right]^{\frac{0,5}{0,5}} = 8 \cdot 10^5;$

$C^* = 0,8 \cdot 10^3 \left[\dfrac{0,2 \cdot 10^3}{0,2+0,05} \right]^{\frac{0,5}{0,5}} = 64 \cdot 10^4$. Заметим, что данное значение удельного потребления не является максимально возможным. Для рассматриваемой производственной функции $\max C^*$ реализуется при $S^* = 0,5$. Проверим этот результат, используя общее правило отыскания золотой нормы сбережения

$\dfrac{df\left(k^*\right)}{dk^*} = h + \mu.$ $\alpha A k^{\alpha-1} = h + \mu,$ откуда $0,5\cdot 10^3 \cdot k^{-0,5} = 0,25$ и $k^* = 4\cdot 10^6$. При этом значении равновесной капиталовооруженности удельное потребление максимально. Подставив это значение k^* в соотношение $k^* = \left[\dfrac{sA}{h+\mu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$, вычислим $4\cdot 10^6 = s^2 \cdot 16\cdot 10^6$, следовательно $S^* = 0,5$. Таким образом $\max C^* = 0,5\cdot 10^3 \left[\dfrac{0,5\cdot 10^3}{0,2+0,05}\right]^{\frac{0,5}{0,5}} = 100\cdot 10^4$.

Модель общего экономического равновесия закрытой экономики

Рассмотрим закрытую макроэкономическую систему, т.е. экономику страны без учета внешнеэкономических связей. В самом общем виде уравнение равновесия такой системы будет $Y = C + I + G$, где Y – величина произведенного ВНП; C – величина непроизводственного потребления, I – величина производственного потребления, т.е. инвестиции в обновление и пополнение капитала; G – величина государственных расходов. В экономических исследованиях принимается, что непроизводственное потребление есть линейная функция располагаемого дохода, т.е. разности между величиной ВНП и общей суммой налоговых платежей T, иначе говоря, $C = C(Y - T)$. Инвестиции в основной капитал есть убывающая функция ставки банковского процента r, т.е. $I = I\left(r\right)$. С учетом этих замечаний уравнение равновесия примет вид: $Y = C\left(Y - T\right) + I\left(r\right) + G$. Если в стране нет признаков экономического или внутриполитического кризиса, то на некотором временном отрезке располагаемый доход сохраняется примерно постоянным, из чего следует постоянство величины непроизводственного потребления C. Отсутствие природных и техногенных катастроф и внешнеполитическая стабильность позволяют принять гипотезу о постоянстве государственных расходов G.

Следовательно, единственным инструментом обеспечения равновесия является величина инвестиций I, зависящая от ставки банковского процента r. Перепишем уравнение равновесия в виде $Y-C-G=I=S$ где S – величина сбережений. Такая форма записи отражает экономически очевидный факт, что инвестировать можно только те средства, которые остались сохраненными. Так же как и инвестиции, величина сбережений есть функция ставки банковского процента, только не убывающая, а возрастающая.

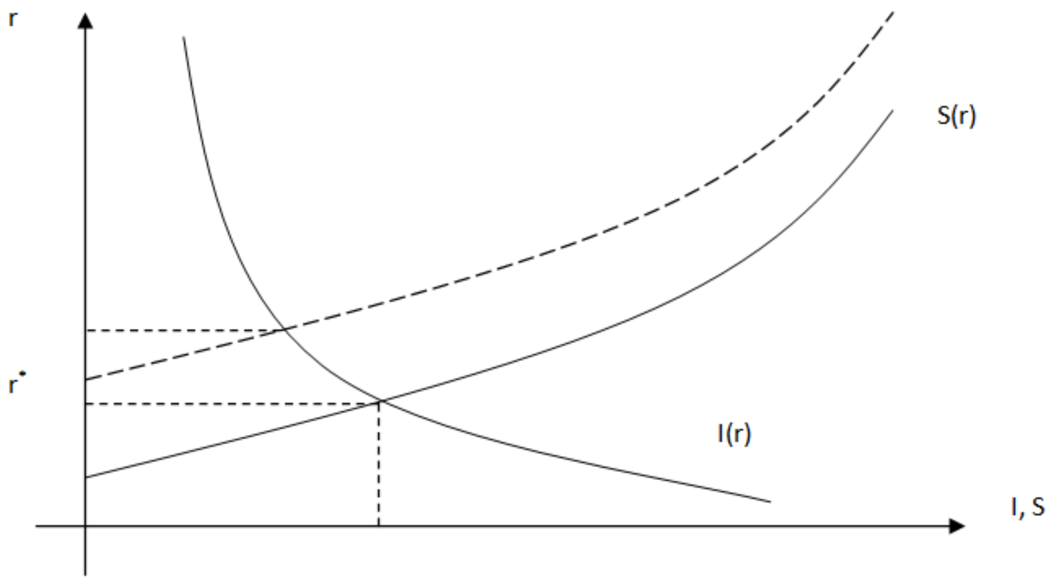


Рис.17. Точка равновесной ставки

Пересечение инвестиционной кривой $I(r)$ с кривой сбережений $S(r)$ определяет точку равновесной ставки банковского процента, при которой обеспечивается сбалансированность доходов и расходов в замкнутой макроэкономической системе.

Рассмотрим подробнее структуру сбережений и выделим в них частные сбережения $S_Ч = Y - C - T$ и государственные $S_Г = T - G$. Это означает, что $S = (Y - C - T) + (T - G)$. Предположим, что государство сочло необходимым увеличить свои расходы. Тогда, очевидно, государственная составляющая сбережений уменьшится и сократится величина сбережений в целом. Некоторая часть инвестиционных программ при этом будет передана частным инвесторам, что стимулирует повышение спроса на деньги и спровоцирует увеличение ставки банковского процента. На рис.17 это выразится смещением кривой сбережений влево в сторону меньших значений и установлением новой более высокой равновесной ставки банковского процента (см. штриховую линию на рис.17). Это явление называется вытеснением инвестиций государственными расходами. Аналогичное по характеру явление наблюдается при снижении величины налоговых сборов. Казалось бы, в этом случае уменьшение государственных сбережений должно компенсироваться увеличением частных. Однако подобного не происходит, поскольку увеличение доли частных лиц в ВНП приводит к росту непроизводственного потребления и уменьшению величины сбережений, что, как было показано выше, влечет повышение равновесной ставки банковского процента. Положение линии инвестиций $I(r)$ также может меняться с изменением количества и привлекательности имеющихся инвестиционных проектов. При появлении мощных инновационных идей их воплощение требует значительных капиталовложений в течение достаточно длительных периодов времени. В 19-ом веке это было создание сети железных дорог, а в 20-ом развитие электроэнергетики, космические программы, создание телекоммуникационных систем и информационных технологий. Гарантированная выгодность таких проектов делает их инвестиционно привлекательными, а масштабность повышает спрос на деньги. При этом кривая инвестиции смещается вверх, а равновесная ставка банковского процента возрастает.

Рассмотрим процесс планирования расходов в закрытой экономической системе. В макроэкономическом понимании они должны предусматривать непроизводственное потребление, затраты на реализацию инвестиционных программ и государственные затраты, то есть $E = C(Y - T) + I + G$. И, если положить неизменными факторы налогово-бюджетной и инвестиционной политики, то расходы будут являться линейной функцией дохода (см. рис. 18). Это линия планируемых расходов.

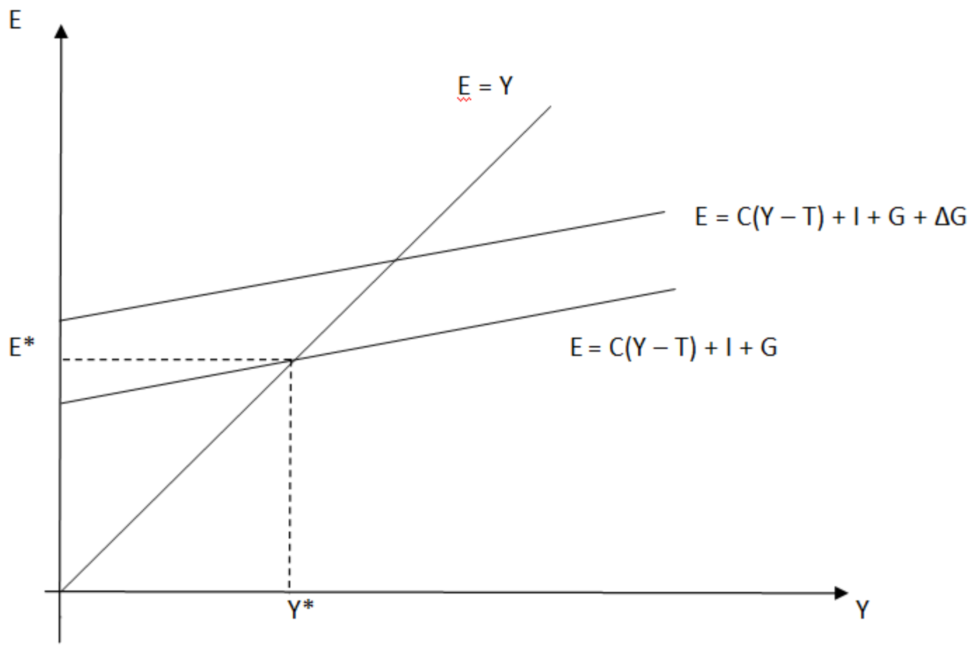


Рис. 18. Точка равновесного дохода

Однако, в условиях закрытой экономики расходы должны быть равны величине фактических доходов т.е., $E = Y$ (см. рис. 18). Это тоже прямая линия, делящая координатный угол пополам. На пересечении ее с линией планируемых расходов находится точка равновесного дохода Y^*, а полученная конструкция носит название крест Кейнса.

Воспользуемся приемом, продемонстрированном при исследовании модели Солоу, и оценим устойчивость этого равновесного положения. Предположим, что $Y > Y^*$, т. е. величина доходов по каким то причинам превысила равновесный уровень. В этом случае, как видно на рис. 18, линия фактических доходов расположена выше линии планируемых расходов, что означает превышение доходов над расходами. Возникает избыток товаров и услуг. Производители, озабоченные проблемами с реализацией и хранением продукции, вынуждены сокращать производство, что влечет за собой снижение дохода и возвращение его к равновесному положению. Если же $Y < Y^*$, величина дохода меньше планируемых расходов возникает ситуация дефицита, сопровождаемая явлениями ажиотажного спроса, спекулятивного повышения цен и т.п. Действующие в условиях рынка производители будут активно наращивать выпуск товаров, увеличивая величину дохода вплоть до достижения точки равновесия. Таким образом, положение равновесного дохода в данной модели устойчиво.

Исследуем поведение модели при изменении величины налоговых сборов T и государственных расходов G, т. е. фактически при перемене налогово-бюджетной политики. Пусть, озабоченное состоянием образования, правительство приняло решение увеличить государственные расходы на ΔG. Именно на эту величину произойдет увеличение расходов, а линия планируемых расходов сдвинется вверх по оси Е. Рассмотрим, как должна измениться величина дохода, чтобы экономика справилась с таким увеличением государственных расходов без ущерба для других макроэкономических параметров.

Используя условие устойчивости положения равновесного дохода, получим

$$Y = C(Y - T) + I + G. \qquad (2.7)$$

Дифференцируем обе части уравнения (2.7) по Y, полагая постоянными I и T, а $C(Y - T)$ сложной функцией.

$$Y + C'dY + dG$$

и, переходя от производных к приращениям, получим

$$\Delta Y = C'\Delta Y + \Delta G.$$

Величину C' принято обозначать δC. Она показывает на сколько изменится величина непроизводственного потребления при изменении дохода на единицу и называется <u>предельной склонностью к потреблению</u>. С учетом этого замечания

$$\Delta Y = \Delta G/(1 - \delta C). \qquad (2.8)$$

Величина $1/(1 - \delta C)$ называется <u>мультипликатором государственных расходов.</u> Она показывает во сколько раз должна вырасти величина дохода, для обеспечения роста государственных расходов на единицу при сохранении неизменными остальных макроэкономических параметров.

Пример 20. При величине предельной склонности к потреблению δC = 0,6 определить, на сколько должен увеличиться доход для увеличения государственных расходов на 1 млрд. руб. Подставляя в выражение (2.8) данные в условии числа получим $\Delta Y = 2{,}5$ млрд. руб.

Действуя аналогично, определим, как будет меняться доход при изменении налоговых сборов и неизменности остальных макроэкономических параметров.

Продифференцируем обе части уравнения (2.7), полагая на этот раз неизменными I и G.

$dY = C'\,(dY - dT) \rightarrow \Delta Y = \delta C(\Delta Y - \Delta T)$.

Выразив отсюда ΔY, получим

$$\Delta Y = -\Delta T \cdot \delta C/(1 - \delta C). \qquad (2.9)$$

Величина $-\,\delta c/(1 - \delta C)$ называется налоговым мультипликатором. Она показывает, во сколько раз должен измениться доход при изменении величины налоговых сборов на единицу. Знак «минус» в формуле (2.9) указывает на то, что снижение налогов выводит равновесие планируемых расходов и фактических доходов на более высокий уровень, иначе говоря, увеличивает доход.

2.3. Модель межотраслевого баланса Леонтьева

Отраслью в экономике называется совокупность производств, выпускающих однородные виды продукции. Например, электроэнергетика, машиностроение, сельское хозяйство и т.п. Весь объем товаров и услуг, произведенных предприятиями отрасли, называется совокупным общественным продуктом отрасли. Выделим в нем две составляющие: 1. Промежуточный общественный продукт, т.е. ту часть совокупного общественного продукта, которая используется в текущий период времени в сфере производственного потребления; 2. Конечный общественный продукт, представляющий часть совокупного общественного продукта, изымаемую из сферы материального производства. Таким образом, конечная продукция отрасли в натуральном выражении формируется из средств, направляемых на возмещение выбытия и пополнение основных фондов, средств, идущих на непроизводственное потребление и накопление и внешнеторгового сальдо. В стоимостном выражении конечная продукция образуется из амортизационных отчислений и вновь созданной стоимости.

Выделим в составе макроэкономической системы n отраслей. Каждая из них в процессе функционирования выступает и производителем продукции и потребителем, как своей собственной продукции, так и продукции других отраслей. Обозначим x_{ij} $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,n}$ объем поставок продукции i-ой отрасли в j-ую отрасль на цели производственного потребления. Одновременно эта же величина имеет смысл затрат продукции, производимой i-ой отраслью, на полный объем выпуска j-ой отрасли. Таким образом, матрица $X=\left(x_{ij}\right)_{n\times n}$ полностью определяет структуру использования промежуточной части совокупного общественного продукта в сфере материального производства. Любой элемент матрицы X выступает одновременно в двух качествах: как элемент строки в смысле распределительной характеристики, а как элемент столбца в смысле затратной характеристики. Сумма элементов i-ой строки матрицы X отражает объем продукции соответствующей отрасли в стоимостном выражении, используемой в производственном потреблении всеми отраслями экономики. Сумма элементов j-ого столбца матрицы X определяет объем затрат j-ой отрасли в стоимостном выражении на производство ее продукции. Величина $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$ называется <u>валовым промежуточным продуктом</u> и характеризует объем производственного потребления макроэкономической системы в целом.

Обозначим y_i $i=\overline{1,n}$ конечный общественный продукт i-ой отрасли, т.е. часть совокупного общественного продукта отрасли, используемого в непроизводственном потреблении. Структура его потребления в стоимостном выражении формируется из амортизационных отчислений j-ой отрасли C_j; заработной платы работников j-ой отрасли v_j; прибыли j-ой отрасли m_j. Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i = X_i \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.10}$$

где X_i- общее количество продукции произведенной в i-ой отрасли и подлежащей распределению. И точно так же $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + c_j + v_j + m_j = X_j \quad j = \overline{1,n}$, где X_j- общее количество продукта потребленного j-ой отраслью. Важнейшим условием нормального функционирования любой макроэкономической системы является баланс между объемами распределенных и потребленных благ, иначе говоря $\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Или, с учетом их структуры

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + c_j + v_j + m_j \right),$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} \left(c_j + v_j + m_j \right). \tag{2.11}$$

Соотношение это выражает единство материально-вещественного и стоимостного аспектов производственного процесса.

Представим подробнее систему уравнений (2.10)

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + \quad + x_{1n} + y_1 = X_1 \\ &x_{21} + x_{22} + \quad + x_{2n} + y_2 = X_2 \\ &. \\ &x_{n1} + x_{n2} + \quad + x_{nn} + y_n = X_n \end{aligned}$$

Обозначим через a_{ij} количество продукции i-ой отрасли расходуемое на производство единицы продукции в j-ой отрасли.

Эти числа называются коэффициентами прямых затрат, а все их множество образует квадратную матрицу $\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$. Для дальнейшего построения модели сделаем два существенных предположения.

1. Будем считать сложившийся цикл производства неизменным, а следовательно элементы матрицы прямых затрат постоянными и неотрицательными.

2. Технологии всех отраслей предполагаются линейными, т.е. объем поставок из i-ой отрасли в j-ую равен соответствующему коэффициенту прямых затрат, умноженному на общее количество продукции, произведенной в j-ой отрасли $x_{ij} = a_{ij}X_j j$.

Замечание. Принято различить отчетные и плановые коэффициенты прямых затрат. Отчетные отражают фактическое состояние межотраслевого производственного взаимодействия и рассчитываются по итогам некоторого хозяйственного периода по формуле $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{X_j}$. Плановые устанавливаются директивно или рассчитываются исходя из особенностей отраслевой структуры и технико-экономических нормативов.

С учетом сделанных замечаний и введенных обозначений система (2.10) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} &a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \quad + a_{1n}X_n + y_1 = X_1 \\ &a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \quad + a_{2n}X_n + y_1 = X_2 \\ & \\ &a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \quad + a_{nn}X_n + y_n = X_n, \end{aligned} \tag{2.12}$$

или в матричной форме записи $AX + y = X$. Здесь $X = \left(X_1, X_2, ...X_n\right)$ вектор совокупного общественного продукта всех отраслей; $y = \left(y_1, y_2, ...y_n\right)$ вектор конечного общественного продукта; $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ матрица коэффициентов прямых затрат.

Экономическое содержание модели позволяет указать несколько очевидных свойств матрицы А: неотрицательность всех ее элементов;

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1$ для $\forall \quad j=\overline{1,n}$, причем хотя бы одно неравенство строгое, т.е. суммарные затраты на производство единицы продукции любой отрасли не могут быть больше ее стоимости; $a_{ij} < 1$ при $i = j$, - т.е. затраты отрасли на производство собственной продукции строго меньше ее стоимости. В зависимости от целей конкретного исследования возможны два варианта использования модели межотраслевого баланса.

1. По заданному вектору совокупного общественного продукта найти вектор конечного общественного продукта.

2. По заданному вектору конечного общественного продукта определить вектор совокупного общественного продукта.

Поскольку качество жизни зависит, прежде всего, от объема непроизводственного потребления, наибольший интерес имеет вторая задача, в которой по заданному уровню конечных общественных продуктов отраслей вычисляется вектор совокупного общественного продукта, позволяющий этот уровень обеспечить. Матрица коэффициентов прямых затрат и модель межотраслевого баланса называются <u>продуктивными</u> если для любого неотрицательного вектора конечного общественного продукта Y уравнения $X - AX = Y$ имеет неотрицательное решение. Экономически, это означает, что организационно – технологическая структура отраслей материального производства способна обеспечить любой заданный уровень непроизводственного потребления.

<u>Теорема</u>. Для того, что бы модель межотраслевого баланса с матрицей коэффициентов прямых затрат A была продуктивной необходимо и достаточно, что бы матрица $(E - A)$ имела неотрицательную обратную матрицу. Покажем необходимость.

□ Пусть матрица $(E - A)$ имеет обратную матрицу $(E - A)^{-1}$, все элементы которой неотрицательны. Тогда решением уравнения $X - AX = Y$ будет вектор $X = (E - A)^{-1} Y$, который в силу неотрицательности матрицы $(E-A)^{-1}$ и вектора y, также будет неотрицательным. ⊠

Пример 21. В макроэкономической системе выделено три отрасли: промышленность, транспорт и агрокомплекс. Определить, какой уровень совокупного общественного продукта по отраслям должен быть достигнут, чтобы уровень конечной продукции упомянутых отраслей составлял $y_1 = 200$ед., $y_2 = 40$ед., $y_3 = 30$ед., если матрица коэффициентов прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Решением задачи является вектор $X = (E-A)^{-1} y$. Как известно из курса линейной алгебры, обратная матрица по отношению к данной находится по правилу $(E-A)^{-1} = \frac{1}{|E-A|} \cdot (E-A)^c$, где $(E-A)^c$- присоединенная или союзная матрица к матрице $(E-A)$, полученная из матрицы ее алгебраических дополнений путем ее транспонирования. Вычислим $(D) = (E-A) = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & 0 \\ -0,2 & 0,6 & -0,1 \\ -0,1 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$; $|D| = 0,336 - 0,001 - 0,016 = 0,319$ и алгебраические дополнения матрицы $(D) = (E-A)$

$D_{11} = 0,48; D_{12} = 0,17; D_{13} = 0,06;\ D_{21} = 0,08;$
$D_{22} = 0,56; D_{23} = 0,01; D_{31} = 0,01; D_{32} = 0,07; D_{33} = 0,4.$ И таким образом $(E-A)^c = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,08 & 0,01 \\ 0,17 & 0,56 & 0,07 \\ 0,06 & 0,01 & 0,4 \end{pmatrix}$, а матрица

$(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,25 & 0,03 \\ 0,53 & 1,76 & 0,22 \\ 0,19 & 0,03 & 1,25 \end{pmatrix}$ это неотрицательная матрица, следовательно, модель продуктивна. Вектор совокупного общественного продукта

$$X=(E-A)^{-1}y=\begin{pmatrix}1{,}5 & 0{,}25 & 0{,}03\\ 0{,}53 & 1{,}76 & 0{,}22\\ 0{,}19 & 0{,}03 & 1{,}25\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}200\\ 40\\ 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}311\\ 183\\ 77\end{pmatrix}$$

Это значит, что для достижения заданных величин конечных общественных продуктов совокупный общественный продукт в промышленности должен составлять $X_1 = 311$ ед., в транспортной отрасли $X_2 = 183$ ед., в агрокомплексе $X_3 = 77$ ед.

Обозначим $(E-A)^{-1} = B$. Тогда $X = By$. Элементы матрицы $B = (b_{ij})_{n\times n}$ называются коэффициентами полных материальных затрат. Они показывают величину производственных затрат в i-ой отрасли, которые необходимы для получения единицы конечной продукции в j-ой отрасли. Полные затраты включают в себя сумму прямых и косвенных затрат, т.е. затрат более высоких порядков, которые могут быть выявлены через ряд технологических звеньев. Как правило косвенные затраты могут быть оценены лишь приближенно, поэтому коэффициенты полных затрат имеют большое практическое значение, так как позволяют определить, как повлияет изменение величины конечной продукции отрасли на функционирование экономической системы в целом.

2.4. Модель управления портфелем ценных бумаг

Рынок ценных бумаг: облигаций – долговых обязательств, гарантированных центральной или региональной властью, и акций – документов, удостоверяющих право собственности на часть активов предприятия или компании, является важнейшим инструментом привлечения инвестиций в экономику. Однако, помимо выполнения своей основной функции, рынок ценных бумаг есть независимый самодостаточный механизм, осуществляющий взаимодействие его участников в соответствии с набором исторически сложившихся правил.

Как и на рынке любого другого товара, стоимость облигаций и акций не постоянна и может существенно отличаться от их номинальной стоимости, объявленной на момент выпуска. Эффективность менеджмента, конкурентоспособность продукции, цены на ресурсы, состояние национальной валюты, перспективы государственной поддержки – далеко не полный список факторов, влияющих на рыночную стоимость акций. Колебания стоимости акций, или, как принято говорить, их курса могут быть весьма значительными даже в течении одной торговой сессии, и участник рынка, сумевший своевременно приобрести набирающие вес ценные бумаги и избавиться от дешевеющих, может на этом неплохо заработать, особенно если в его управлении находятся крупные пакеты ценных бумаг. Но если тенденции будут оценены не верно, или реализация решений не будет успевать за темпом происходящих изменений, участник торгов понесет потери.

Опуская различные способы начисления процентов и особенности деятельности венчурных фондов, ценные бумаги принято сравнивать по двум показателям: ожидаемой эффективности (доходности) и рискованности (надежностью гарантий получения ожидаемого дохода). Малодоходные бумаги, как правило, более надежны, а бумаги с высоким декларируемым доходом являются высоко рискованными, и вполне вероятно, что их обладатель не получит заявленных дивидендов. Таким образом, работа на рынке ценных бумаг может быть интерпретирована как игра, в которой возможны и выигрыши и проигрыши, и успешным окажется тот игрок, которому удастся выстроить более рациональную стратегию поведения, найти компромисс между стремлением к максимальному доходу и степенью допустимого риска. Именно это составляет содержательную сторону модели, рассмотренной в данной главе.

Пусть имеется некоторая сумма денег, которую предполагается вложить в приобретение ценных бумаг. Обозначим x_i - долю имеющихся денежных средств, потраченных на покупку ценных бумаг i-того вида; E_i - эффективность (доходность) ценной бумаги i-того вида, которая, полагается случайной величиной с математическим ожиданием m_i, которое имеет смысл средней величины ожидаемого дохода, и средним квадратичным отклонением σ_i. Величина $W_{ii} = \sigma_i^2$ - дисперсия эффективности возрастает по мере увеличения рискованности соответствующего актива и принимается как мера его рискованности. Через W_{ij} будем обозначать ковариацию ценных бумаг различных видов, посредством которой оценивается связь между их показателями риска.

Набор ценных бумаг, которыми располагает участник рынка, называется его портфелем. Эффективность портфеля E_p определяется так же, как и эффективность каждой ценной бумаги в отдельности и является величиной случайной, поэтому ее ожидаемая эффективность m_p вычисляется как математическое ожидание содержимого портфеля

$$m_p = M\lfloor E_p \rfloor = \sum_i x_i m_i. \quad (2.13)$$

Дисперсия портфеля, оценивающая степень его рискованности, есть

$$D\lfloor E_p \rfloor = W_p = \sum_i \sum_j x_i x_j W_{ij}. \quad (2.14)$$

На основании изложенных предпосылок, задача управления портфелем ценных бумаг была сформулирована Марковицем следующим образом: найти значения x_i^*, минимизирующие величину дисперсии портфеля W_p, при условии обеспечения заданной эффективности m_p. Это типичная задача нелинейного, а точнее квадратичного программирования, математическая форма записи которой имеет вид:

$$min\ W_p = min \sum_i \sum_j x_i x_j W_{ij} \text{ при } \sum_i x_i m_i = (\geq) m_p; \quad \sum_i x_i = 1. \qquad (2.15)$$

Если в полученном решении величина $x_i^* \geq 0$ – это означает рекомендации вложить долю средств, предназначенных для приобретения ценных бумаг, равную x_i^* в бумаги i-ого вида. Если же окажется, что $x_i^* < 0$, то эти бумаги надо срочно вывести из состава портфеля и заменить их другими активами. Как ясно видно из постановки задачи, ее решение, то есть величина риска, есть функция желаемой эффективности портфеля m_p.

Дальнейшее развитие задача об оптимальном портфеле ценных бумаг получила в работах американского экономиста Тобина, который ввел понятие безрисковых бумаг и дополнил постановку задачи Марковица. К бумагам такого типа могут быть отнесены ценные государственные бумаги таких стран как США, Германия, Швейцария, экономические системы которых обладают высочайшей устойчивостью. Сравнительно невысокая доходность этих бумаг компенсируется практически абсолютными гарантиями их надежности.

Пусть гарантированная эффективность безрисковых бумаг равна m_0, а их доля в составе портфеля x_0. Тогда, очевидно, рисковая часть портфеля равна $(1 - x_0)$. Обозначим m_r среднюю ожидаемую эффективность, W_r дисперсию, σ_r среднее квадратичное отклонение рисковой составляющей портфеля. Средняя ожидаемая эффективность портфеля в целом и определится как сумма его безрисковой и рисковой части $m_p = x_0 m_0 + (1 - x_0) m_r$, а поскольку дисперсия безрисковой части равна нулю, дисперсия портфеля $W_p = (1 - x_0)^2 W_r$. Исключая x_0, получим

$$m_p = m_0 + \left(m_r - m_0\right) \cdot \frac{\sigma_p}{\sigma_r}, \qquad (2.16)$$

то есть ожидаемая эффективность портфеля, имеющего в своем составе как рисковые так и безрисковые активы линейно зависит от его рисковой части.

С учетом полученного результата, постановка задачи об оптимальном портфеле, имеющем в своем составе как рисковые так и безрисковые ценные бумаги, будет иметь вид :

$$min W_p = min \sum_i \sum_j x_i x_j W_{ij} \text{ при } x_0 m_0 + \sum_i x_i m_i = m_p; \; x_o + \sum_i x_i = 1 \qquad (2.17)$$

Это тоже типичная задача нелинейного (квадратичного) программирования, методы решения которой известны и хорошо изучены. Поэтому, опуская технические подробности, остановимся на окончательном результате, полученном Тобиным. Обозначим W - матрицу ковариаций рисковых видов ценных бумаг; $X = (x_i)$ $i = \overline{1,n}$ - вектор столбец долей рисковых ценных бумаг, входящих в состав портфеля; $M = (m_i)$ $i = \overline{1,n}$ – вектор столбец ожидаемых эффективностей соответствующих ценных бумаг; I - единичный вектор столбец. С учетом принятых обозначений, вектор X^*, элементы которого имеют смысл долей рисковых видов бумаг, составляющих оптимальный портфель минимального риска с заданной эффективностью, будет рассчитываться по формуле:

$$X^* = \frac{(m_p - m_0) \cdot W^{-1} \cdot (M - m_0 I)}{(M - m_0 I)^T \cdot W^{-1} \cdot (M - m_0 I)}. \qquad (2.18)$$

Представим целевую функция задачи (2.17) в матричной форме записи $W_p = X^T \cdot W \cdot X$ и поставим в нее оптимальное значение вектора X^* из выражения (2.18), обозначив для удобства дальнейшего изложения знаменатель выражения (2.18) d^2. Тогда минимальная дисперсия портфеля заданной эффективности m_p определится как

$$W_p^* = \left[\frac{(m_p - m_0)^2}{d^4}\right] \cdot W^{-1} \cdot (M - m_0 I) \cdot W \cdot W^{-1} \cdot (M - m_0 I)^T = \frac{(m_p - m_0)^2}{d^2} \qquad (2.19)$$

Отождествляя риск портфеля r_p с величиной среднего квадратичного отклонения, получим итоговое расчетное соотношение

$$r_p \equiv \sigma_p = \frac{(m_p - m_0)}{d}. \qquad (2.20)$$

Замечание. Задача об оптимальном управлении портфелем допускает и обратную постановку: сформировать портфель ценных бумаг максимальной средней эффективности при условии, что риск портфеля не превысит заданного значения r_p. Её математическая постановка имеет вид:

$$max\, m_p = max \sum_i x_i m_i \text{ при } \sum_i \sum_j x_i x_j W_{ij} = (\leq) W_p \equiv r_p^2; \quad \sum_i x_i = 1. \qquad (2.21)$$

Эта задача двойственная по отношению к задаче (2.15) и мы не будем здесь рассматривать ее решение, тем более, что в на практике, как правило, задача об оптимальном портфеле формулируется в оригинальной постановке Марковица (2.15) и Тобина (2.16).

Пример 22. Сформулировать и решить задачу об оптимальном портфеле по критерию минимального риска и заданной средней эффективности для ценных бумаг трех видов: безрисковых с эффективностью $m_0 = 2$ и рисковых, средние ожидаемые эффективности которых и значения рисков равны $m_1 = 6;\ m_2 = 8;\ r_1 = 4;\ r_2 = 9$. Величина ковариации между рисковыми бумагами $W_{12} = 9$.

Руководствуясь выражением (2.17) получим:

$$min\left(16x_1^2 + 18x_1x_2 + 81x_2^2\right) \text{ при } 2x_0 + 6x_1 + 8x_2 = m_p; \quad x_0 + x_1 + x_2 = 1.$$

Исключая x_0, освободимся от одного из ограничений

$$min\left(16x_1^2 + 18x_1x_2 + 81x_2^2\right) \text{ при } 4x_1 + 6x_2 = m_p - 2.$$

Таким образом $W=\begin{pmatrix}16 & 9\\ 9 & 81\end{pmatrix}$; $M=\begin{pmatrix}6\\ 8\end{pmatrix}$. Находим $W^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}0667 & -0{,}0074\\ -0{,}0074 & 0{,}0132\end{pmatrix}$ и $d^2=(4\quad 6)\cdot\begin{pmatrix}0{,}0667 & -0{,}0074\\ -0{,}0074 & 0{,}0132\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 6\end{pmatrix}=1{,}192$. Подставляя в формулу (2.18), находим вектор X^*, элементами которого являются доли рисковых ценных бумаг в составе оптимального портфеля $X^*=\frac{(m_p-2)^2}{1{,}192}\cdot\begin{pmatrix}0{,}2236\\ 0{,}0496\end{pmatrix}=(m_p-2)^2\cdot\begin{pmatrix}0{,}188\\ 0{,}042\end{pmatrix}$, а по формуле (2.20) найдем соответствующее ему значение риска $r_p=\frac{(m_p-2)}{\sqrt{1{,}192}}=\frac{(m_p-2)}{1{,}092}$.

Определим состав портфеля и численные значения рисков для средних значений эффективности $m_p=3$ и $m_p=4$. Для первого случая вектор $X^*=\begin{pmatrix}0{,}188\\ 0{,}042\end{pmatrix}$. Это означает, что рисковых бумаг первого вида в составе портфеля должно быть 18,8 %, а рисковых бумаг второго вида 4,2 %. На безрисковые бумаги приходится, таким образом, 77 % состава портфеля. Величина риска при этом будет $r_p^*=0{,}916$. Во втором случае вектор $X^*=\begin{pmatrix}0{,}752\\ 0{,}168\end{pmatrix}$, то есть доля рисковых бумаг первого вида возрастает до 75,2 %, а рисковых бумаг второго вида дл 16,8 %. При этом доля безрисковых бумаг уменьшается до 8%. Величина риска становится существенно больше $r_p^*=1{,}832$.

В рассмотренном примере увеличение среднего ожидаемого дохода на одну треть приводит к двукратному возрастанию риска. Это свидетельствует о том, что результат решения задачи управления портфелем ценных бумаг в постановке Марковица-Тобина зависит, прежде всего, от того, какую величину риска участник рынка считает допустимой и какой размер выигрыша приемлемым. Иначе говоря, основные параметры данной модели формируются под влиянием человеческого фактора.

2.5. Модель фон Неймана

Модель фон Неймана является одной из наиболее известных фундаментальных зкономико-математических моделей. При ее построении не использованы интуитивные и субъективные предпосылки, такие как аксиомы полезности, правило убывающего предельного продукта и т. п. В основании этой модели лежат только самые общие экономические понятия: товара, цены, производственного процесса, и, в предположении линейной связи между выпуском и затратами, строится логически непротиворечивая модель функционирования экономики. Для понимания модели фон Неймана не требуется математических знаний, выходящих за рамки программы бакалавариата по техническим и экономическим специальностям, так же как и для понимания остального содержания пособия. Однако, здесь имеет место более высокий уровень абстракции, по сравнению с моделями, рассмотренными выше, что требует определенной математической культуры.

В самом общем виде любая экономическая система может быть охарактеризована множеством продуктов, имеющихся в ней X, с элементами $x=(x_1,x_2,......x_n)$ и множеством базисных технологических процессов Q с элементами $q=(q_1,q_2,.......q_m)$, которые имеют смысл операторов, преобразующих некоторый элемент множества X в другой элемент того же множества. Понятие «продукт» в модели фон Неймана имеет предельно широкое толкование, включая в себя все материальные предметы экономического обихода, как направляемые на непроизводственное потребление, так и используемые как предметы труда в процессе производства. То есть продуктами считается и хлеб, и мука, из которой он изготовлен, и зерно, и сельскохозяйственная техника, и минеральные удобрения и т.п.

Любой элемент множества Q представляет собой упорядоченную пару элементов множества $X: q_j = (A_j; B_j) \; \forall j = \overline{1,m}$, где $A_j = (a_{ij})$ имеет смысл затраченного набора продуктов, а $B_j = (b_{ij})$ произведенного набора продуктов $i = \overline{1,n}$. Эти векторы неотрицательны. Полный набор векторов $(A_j)_{j=\overline{1,m}}$ и $(B_j)_{j=\overline{1,m}}$ формирует матрицы размерности $n \times m$. A - матрица затрат; B- матрица выпуска. Для понимания модели фон Неймана необходимо ясно представлять, что как матрицы затрат и выпуска в целом, так и отдельные вектора A_j и B_j, связанные оператором q_j в упорядоченную пару, соответствуют *различным* моментам времени. Затраты, понесенные в текущий момент времени, не дать результат мгновенно, поэтому вектор выпуска, соответствующий некоторому вектору затрат, относится к следующему моменту времени. Другими словами, в выбранной временной шкале затратам в момент времени t соответствует выпуск в момент времени $t+1$.

Используя линейные комбинации базисных процессов, можно получить более широкую совокупность: множество производственных способов. Для этого достаточно некоторый набор неотрицательных чисел $z_j \quad j = \overline{1,m}$ и задать новый производственный процесс как сумму $z_1 q_1 + z_2 q_2 + ... + z_m q_m$, в котором затраты заданы вектором $\sum_{j=1}^{m} z_j A_j$, а выпуск вектором $\sum_{j=1}^{m} z_j B_j$. Вектор $z = (z_j)_{j=\overline{1,m}}$ называется вектором интенсивностей. Если элементы множества Q имеют смысл отдельных предприятий или отраслей, то их линейные комбинации могут быть интерпретированы как различные варианты их совместного функционирования. Обозначим символом K множество всех линейных комбинаций базисных производственных процессов.

Математический объект, определяемый заданием двух множеств $\{X, K\}$, называется моделью фон Неймана.

Отметим некоторые свойства модели фон Неймана.

1. Линейность. Это свойство следует непосредственно из процедуры построения модели.

2. Замкнутость. $Az^t \le Bz^{t-1} \quad \forall t = \overline{1,T}$. Замечание. Здесь t- верхний индекс, имеющий смысл момента времени, к которому относятся затраты или выпуск, а T- время жизни модели. Экономически это свойство означает, что в любой момент времени доступными для использования в процессе производства являются только те продукты, которые имелись в предшествующий период времени. Последовательность интенсивностей $\{z^t\}_{t=\overline{1,T}}$, удовлетворяющая условию замкнутости, называется допустимой траекторией интенсивностей.

3. Ограниченность. $z^t B < \infty$ для $\forall z^{t-1} A$. Фиксирует экономически очевидный факт: неограниченные объемы производства невозможны при коечных затратах.

Пример 23. На трехпродуктовом множестве X заданы два базисных технологических процесса $q_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ и вектор интенсивностей $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Найти исходные матрицы затрат и выпуска, а также векторы затрат и выпуска производственного способа, задаваемого указанным вектором интенсивностей.

Поскольку элементы множества базисных технологических процессов q_j по определению есть упорядоченные пары векторов затрат и выпуска, их первые элементы являются векторами затрат, а вторые векторами выпуска. Следовательно, матрица затрат $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, а матрица выпуска $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\\ 4 & 3\end{pmatrix}$. Векторы же затрат и выпуска нового производственного процесса получаются умножением матриц затрат и выпуска на вектор интенсивностей. Таким образом $Az=\begin{pmatrix}5\\ 8\\ 9\end{pmatrix}$- вектор затрат производственного процесса, а $Bz=\begin{pmatrix}9\\ 13\\ 13\end{pmatrix}$- вектор выпуска.

Теперь для той же самой матрицы затрат проверим допустимость последовательности интенсивностей вида: $z^1=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$; $z^2=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$ при условии, что начальные запасы продуктов заданы вектором $S=\begin{pmatrix}6\\ 9\\ 9\end{pmatrix}$. Фактически это означает проверку условия замкнутости. Поскольку вектор начальных запасов S определяет количество продуктов, имевшихся в наличии до начала производственной деятельности, что соответствует моменту времени $t=0$, должно выполняться условие $Az^1 \le S$. Вектор Az^1 уже был вычислен. Сравнивая его с вектором s, убеждаемся в выполнении условия замкнутости для первого элемента последовательности интенсивностей. На следующем шаге проверяем выполнение условия $Az^2 \le Bz^1$. Вектор Bz^1 также уже вычислен, поэтому вычисляем только вектор $Az^2=\begin{pmatrix}7\\ 10\\ 12\end{pmatrix}$. Сравнивая его с вектором Bz^1, убеждаемся в выполнении условия замкнутости и для второго элемента последовательности интенсивностей.

Следовательно, последовательность интенсивностей $z^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $z^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ является допустимой.

Обозначим p_i^t - стоимость единицы, то есть цену i-ого продукта в момент времени t. Тогда все множество цен в этот период будет характеризоваться вектором $p^t = \left(p_1^t, p_2^t, ...p_n^t\right)$. Этот вектор носит название вектора цен. Величина $p^{t+1}B_j - p^t A_j$ определяет доход j-ого базисного технологического процесса за t-ый период времени.

В рамках модели фон Неймана действует правило нулевого дохода, которое выражается неравенством

$$p^{t+1}B_j - p^t A_j \leq 0. \tag{2.22}$$

Это странное, на первый взгляд, правило не более необычно чем равенство нулю максимальной прибыли фирмы, действующей в условиях совершенной конкуренции (см. раздел 2.2). Пренебрежение этим правилом создает предпосылки для нарушения ограниченности модели, кода стоимость произведенных товаров бесконечно возрастает при конечной величине затрат. Во избежание недоразумений заметим также, что, как видно из выражения (2.22), величина дохода определяется по стоимости продуктовых наборов в *различные моменты времени*. Так если в момент времени t сумма понесенных затрат составила величину M, то при нулевом доходе, и выполнении соотношения (2.22) как равенства, в период времени $t+1$ стоимость товарного набора снова будет равна M. Однако, если в момент времени $t+1$ цены в сопоставимых единицах станут ниже, то это будет означать фактическое увеличение стоимости исходной суммы денег. Последовательность цен $\{ p^t \}_{t=\overline{1,T}}$, удовлетворяющая правилу нулевого дохода, называется траекторией цен.

Если предположить, что общая масса денежных средств, постоянно находящаяся в обращении, остается неизменной, то

$$p^t A z^t = p^{t+1} B z^t. \tag{2.23}$$

То есть для любого временного промежутка общая стоимость продуктов, использованных в процессе производства, равна стоимости произведенных продуктов в ценах следующего периода.

Та же самая предпосылка позволяет сделать и другой не менее важный вывод о том, что вся произведенная стоимость вновь направляется в производственную сферу в следующий период времени. Этот факт выражается соотношением

$$p^{t+1}Bz^t = p^{t+1}Az^{t+1}. \qquad (2.24)$$

Допустимая траектория интенсивностей $\{z^t\}_{t=\overline{1,T}}$ называется <u>стационарной</u>, если для $\forall t=\overline{1,T}$ $\exists \eta > 0$: $z^{t+1} = \eta z^t$. Иными словами, от периода к периоду вектор интенсивностей изменяется в одно и то же число раз в течении всего времени существования модели. Если $\eta > 1$, то это стационарная траектория роста, в противном случае – траектория падения.

<u>*Лемма*</u>. Стационарная траектория интенсивностей удовлетворяет условию $\eta Az \le Bz$. В силу свойства замкнутости модели фон Неймана $Az^{t+1} \le Bz^t$. Но, по определению стационарности, $z^{t+1} = \eta z^t \;\Rightarrow\; \eta Az^t \le Bz^t \quad \forall t=\overline{1,T}$.

Траектория цен $\{p^t\}_{t=\overline{1,T}}$ называется <u>стационарной</u>, если для $\forall t=\overline{1,T}$ $\exists \mu > 0$: $\mu p^{t+1} = p^t$, то есть от периода к периоду цены изменяются в одно и то же число раз в течении всего времени существования модели. Для стационарной траектории цен справедлива лемма аналогичная лемме для стационарной траектории интенсивностей.

<u>*Лемма*</u>. Стационарная траектория цен удовлетворяет условию $\mu pA \ge pB$. Доказательство ее полностью аналогично лемме для траектории интенсивностей.

Положение модели фон Неймана называется <u>динамическим равновесием</u>, если $\exists \lambda > 0$ и неотрицательные не нулевые векторы интенсивностей z и цен p, такие, что $\lambda Az \le Bz;\; \lambda pA \ge pB;\; \lambda pAz = pBz$. В содержательном смысле положение динамического равновесия характеризует такое состояние экономической системы, при котором от периода к периоду и интенсивности и цены изменяются разнонаправлено в одно и то же число раз и с тем же темпом растет стоимость продуктового набора в сопоставимых ценах.

Рассмотрим на практических примерах возможности модели фон Неймана и технические аспекты применения сопутствующего математического аппарата.

Пример 24. Для трехпродуктовой двухотраслевой модели фон Неймана с матрицей затрат $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, матрицей выпуска $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ и вектором начальных запасов $S = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$ найти вектор интенсивностей, максимизирующий стоимость выпуска, если вектор цен $p = (1;\ 2;\ 4)$.

Математическая формулировка задачи будет выглядеть следующим образом: $max\, pBz$ при выполнении условий $Az \le S; \quad z \ge 0$.

Это типичная задача линейного программирования, представленная в матричной форме записи. Используя условия задачи, получим:

$$max\ (26z_1 + 23z_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 + 2z_2 &\le 10 \\ 3z_1 + 2z_2 &\le 20 \qquad z_j \ge 0 \quad j = \overline{1,2} \\ 2z_1 + z_2 &\le 15 \end{aligned}$$

Решение, полученное табличным вариантом симплекс-метода, приведено в таблице 21.

Примечание. Ведущие элементы на каждой итерации выделены жирным шрифтом и подчеркиванием.

Таблица 21

№ п/п	Базисные перемен.	Базисные C_i	x_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	Симплекс. отношение
0	z_3	0	10	1	2	1	0	0	20/3
	z_4	0	20	<u>**3**</u>	2	0	1	0	
	z_5	0	15	2	1	0	0	1	
Индексная строка			0	-26	-23	0	0	0	
1	z_3	0	10/3	0	<u>**4/3**</u>	1	-1/3	0	5/2
	z_1	26	20/3	1	2/3	0	1/3	0	
	z_5	0	5/3	0	-1/3	0	-2/3	1	
Индексная строка			520/3	0	-17/3	0	26/3	0	
2	z_2	23	5/2	0	1	3/4	-1/4	0	-
	z_1	26	5	1	0	-1/2	1/2	0	
	z_5	0	5/2	0	0	1/4	-3/4	1	
Индексная строка			187,5	0	0	17/4	25/4	0	

Решение задачи получено: максимальная стоимость выпуска pBz в предложенных условиях составит 187,5 единицы. Она достигается при векторе интенсивностей $z = \begin{pmatrix} 5 \\ 5/2 \end{pmatrix}$. При этом первое и второе ограничения задачи линейного программирования выполняются как строгие равенства, а третье как неравенство. Следовательно, подобная организация производственно процесса предполагает полное использование имеющихся запасов первого и второго продуктов, неиспользованный резерв третьего продукта составит 2,5 единицы.

Пример 25. В двухпродуктовой двухотраслевой модели фон Неймана с матрицей затрат $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, матрицей выпуска $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ и вектором начальных запасов $S=\begin{pmatrix}5\\ 8\end{pmatrix}$ найти векторы интенсивности, обеспечивающие полное использование продуктовых запасов в трех последовательных производственных циклах.

В связи с требованием полного использования продуктовых запасов, условие замкнутости для данной задачи должно выполняться как строгое равенство. Для первого цикла производства $Az^1=S$. Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений для определения вектора интенсивностей первого цикла производства
$\begin{matrix}2z_1^1+\ z_2^1=5\\ 2z_1^1+2z_2^1=8\end{matrix}$ => $\begin{matrix}z_1^1=1\\ z_2^1=3\end{matrix}$ => $z^1=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$, а вектор выпуска $Bz^1=\begin{pmatrix}9\\ 13\end{pmatrix}$.
Вновь используя условие замкнутости в форме равенства для второго производственного цикла получим: $Az^2=Bz^1$, откуда

$\begin{matrix}2z_1^2+\ z_2^2=\ 9\\ 2z_1^2+2z_2^2=13\end{matrix}$ => $\begin{matrix}z_1^2=2{,}5\\ z_2^2=\ 4\end{matrix}$ => $z^2=\begin{pmatrix}2{,}5\\ 4\end{pmatrix}$, а вектор выпуска $Bz^2=\begin{pmatrix}15{,}5\\ 22\end{pmatrix}$. Аналогично для третьего цикла производства $Az^3=Bz^2$, что также приводит с системе линейных уравнений

$\begin{matrix}2z_1^3+\ z_2^3=15{,}5\\ 2z_1^3=2z_2^3=\ 22\end{matrix}$ => $\begin{matrix}z_1^3=4{,}5\\ z_2^3=6{,}5\end{matrix}$ => $z^3=\begin{pmatrix}4{,}5\\ 6{,}5\end{pmatrix}$, а вектор выпуска третьего производственного цикла $Bz^3=\begin{pmatrix}26{,}5\\ 37{,}5\end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения

№31 .Для пространства трех товаров с вектором цен **P** = (5, 2, 4) дайте описание бюджетного множества и его границы, а также их графическую интерпретацию, если величина дохода **Q** = 60. Трудоемкость – 5 (мин/раб) эксперта.

№32. Для потребителя, функция полезности которого $u = x_1\sqrt{x_2}$, величина дохода $Q = 54$ найти точку спроса, если вектор цен $P = (6,2)$. Трудоемкость – 5 (мин/раб) эксперта.

№33. Для потребителя, функция полезности которого $u = x_1^2 + 2x_1x_2$, величина дохода $Q = 48$ найти точку спроса, если вектор цен $P = (4,2)$. Трудоемкость – 5 (мин/раб) эксперта.

№34. Для потребителя, функция полезности которого $u = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, величина дохода $Q = 24$ найти точку спроса, если вектор цен $P = (1,8)$. Трудоемкость – 5 (мин/раб) эксперта.

№35. Зависимость ежедневного урожая огурцов в теплице y от числа работников x выражается соотношением: $y = 20\sqrt{x} + 20 ln\, x$. Найти оптимальное число работников, если дневная зарплата одного работника равна доходу от продажи 10 кг огурцов. Трудоемкость – 10 (мин/раб) эксперта.

№36. Объем сбыта Y зависит от назначаемой цены p по формуле $Y = 11 - p$. Зависимость издержек I от объема сбыта имеет вид: $I = Y^2 - 5Y + 11$. По критерию максимальной прибыли найти оптимальный объем производства, величины прибыли и издержек. Трудоемкость – 10 (мин/раб) эксперта.

№37. Найти параметры производственной функции Кобба – Дугласа $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, если известно, что для увеличения выпуска продукции на 2% надо увеличить основные фонды на 4% или численность работников на 6%. Известно также, что месячная производительность одного работника составляет 10000 ден.ед.; численность работников L = 1000; основные фонды K = 10^{11} ден.ед. Трудоемкость – 15 (мин/раб) эксперта.

№38. Для производственной функции Кобба-Дугласа $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ с параметрами $A = 1000;$ $\alpha = \frac{1}{2};$ $\beta = 1 - \alpha$ найти значения равновесной капиталовооруженности, производительности и удельного потребления на стационарной траектории если $s=0{,}25;\quad h=0{,}1;\quad \mu=0{,}05$. Трудоемкость – 5 (мин/раб) эксперта.

№39. Найти равновесную капиталовооруженность, производительность и величину удельного потребления на стационарной траектории для производственной функции Кобба-Дугласа, $Y=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ если $A=1000;\quad \alpha=\frac{1}{3}$, а равновесная траектория характеризуется параметрами $s=0{,}5;\quad h=0{,}2;\quad \mu=0{,}05$. Трудоемкость – 5 (мин/раб) эксперта.

№40. Зависимость дневной выручки сезонного кафе Y (без учета стоимости закусок и напитков) от числа столиков G и числа работников F выражается формулой $Y=200G^{2/3}F^{1/4}$. Дневные расходы на содержание одного столика составляют 100 ден. ед., а средняя дневная зарплата одного работника – 50 ден. ед. Найти оптимальную численность работников кафе и количество столиков, при которых достигается максимальная прибыль. Ответ округлить до большего целого числа. Трудоемкость – 25 (мин/раб) эксперта.

№41. Производственная функция предприятия имеет вид: $Y=100K^{1/5}L^{2/5}$. Арендная плата за единицу капитала $r=5$ ден .ед., а ставка оплаты единицы труда $w=3$ ден. ед. Цена продукции предприятия $p=6$ ден. ед. Найти сколько сотрудников должны работать на предприятии для того, чтобы прибыль его бала максимальной, и величину максимальной прибыли. Трудоемкость – 25 (мин/раб) эксперта.

№42. В составе экономической системы страны условно выделены три отрасли. Объемы конечной продукции отраслей составляют соответственно y_1 = 180 ед.; y_2 = 120 ед.; y_3 = 50 ед. Матрица коэффициентов прямых затрат имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найти вектор совокупной общественной продукции отраслей. Трудоемкость – 20 (мин/раб) эксперта

№43. В составе экономической системы страны условно выделены три отрасли. Объемы конечной продукции отраслей составляют соответственно y_1 = 150 ед.; y_2 = 80 ед.; y_3 = 60 ед. Матрица коэффициентов прямых затрат имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Найти вектор совокупной общественной продукции отраслей. Трудоемкость – 20 (мин/раб) эксперта.

№44. В составе экономической системы страны условно выделены три отрасли. Объемы конечной продукции отраслей составляют соответственно y_1 = 100 ед.; y_2 = 160 ед.; y_3 = 40 ед. Матрица коэффициентов прямых затрат имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Найти вектор совокупной общественной продукции отраслей. Трудоемкость – 20 (мин/раб) эксперта.

№45. Определить является ли допустимой последовательность интенсивностей $z^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $z^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ в трехпродуктовой двухотраслевой модели фон Неймана, если вектор начальных запасов $S = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$; матрица затрат $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; матрица выпуска $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Трудоемкость – 15 (мин/раб) эксперта.

№46. Определить является ли допустимой последовательность интенсивностей $z^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $z^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ в трехпродуктовой двухотраслевой модели фон Неймана, если вектор начальных запасов $S=\begin{pmatrix}8\\11\\12\end{pmatrix}$; матрица затрат $A=\begin{pmatrix}2&2\\2&3\\4&2\end{pmatrix}$; матрица выпуска $B=\begin{pmatrix}4&3\\3&5\\5&4\end{pmatrix}$. Трудоемкость – 15 (мин/раб) эксперта.

№47.Для двухпродуктовой трехотраслевой модели фон Неймана с матрицей затрат $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\1&3&3\end{pmatrix}$, матрицей выпуска $B=\begin{pmatrix}4&3&5\\3&5&5\end{pmatrix}$ и вектором начальных запасов $S=\begin{pmatrix}20\\10\end{pmatrix}$ найти вектор интенсивностей, максимизирующий стоимость выпуска, если вектор цен $p=(1;\ 2)$. Трудоемкость – 20 (мин/раб) эксперта.

№48. Для трехпродуктовой трехотраслевой модели фон Неймана с матрицей затрат $A=\begin{pmatrix}9&9&2\\4&3&2\\1&2&4\end{pmatrix}$, матрицей выпуска $B=\begin{pmatrix}9&12&4\\5&5&4\\2&4&6\end{pmatrix}$ и вектором начальных запасов $S=\begin{pmatrix}180\\120\\220\end{pmatrix}$ найти вектор интенсивностей, максимизирующий стоимость выпуска, если вектор цен $p=(1;\ 1;\ 2)$. Трудоемкость – 30 (мин/раб) эксперта.

№49. Сформулировать и решить задачу об оптимальном портфеле по критерию минимального риска и заданной средней эффективности для ценных бумаг трех видов: безрисковых с эффективностью $m_0=2$ и рисковых, средние ожидаемые эффективности которых и значения рисков равны $m_1=4;\ m_2=7;\ r_1=3;\ r_2=7$. Величина ковариации между рисковыми бумагами $W_{12}=6$. Трудоемкость – 20 (мин/раб) эксперта.

№50. Сформулировать и решить задачу об оптимальном портфеле по критерию минимального риска и заданной средней эффективности для ценных бумаг четырех видов: безрисковых с эффективностью $m_0 = 1$ и рисковых, средние ожидаемые эффективности которых и значения рисков равны соответственно $m_1 = 4;\ m_2 = 5;\ m_3 = 7,\ r_1 = 2;\ r_2 = 4;\ r_3 = 6,$ при условии, что рисковые бумаги предполагаются некоррелированными. Трудоемкость – 20 (мин/раб) эксперта.

Раздел 3. Организация на основе учебного пособия процесса подготовки и оценки результатов в метрическом компетентностном формате

На рис. 19 приводится архитектура организации учебного пособия.

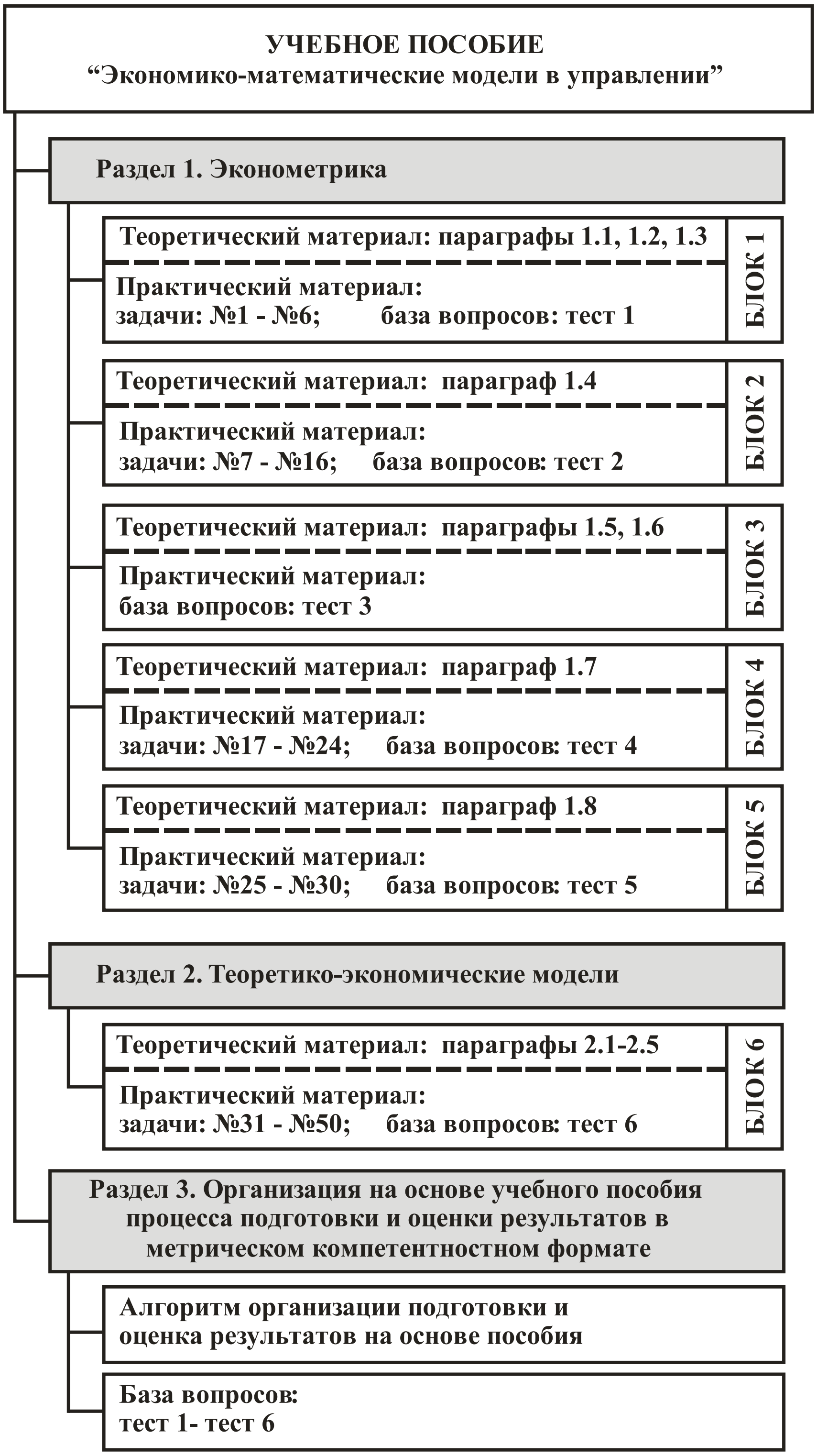


Рис. 19. Структура организации обучения

В ходе подготовки учебный материал может быть освоен как традиционным способом, так и с использованием дистанционных технологий в метрическом компетентностном формате [10 - 21].

3.1. Алгоритм организации подготовки и оценки результатов в метрическом компетентностном формате

Освоение и оценка качества овладения компетенция каждым студентом производится по следующему алгоритму:

1. Осваивается теоретический материал, который изложен в пунктах 1.1, 1.2, 1.3 (блок 1).
2. Оценка полноты и целостности усвоенного материала из блока 1 производится с помощью двойного тестирования:
   - тестирование из 5 случайно выбранных вопросов на полноту усвоенного материала (вычисляется характеризующий параметр POL(1));
   - тестирование из 5 случайно выбранных вопросов на целостность усвоения учебного материала (вычисляется характеризующий параметр CHL(1)).

Комментарий. Например, студент из 10 вопрос из блока 1 на полноту ответил правильно на 7 вопросов. Значение параметра POL(1)=7/10=0,7. Аналогично, этот же студент из 10 вопросов из блока 1 на целостность ответил правильно на 6 вопросов. Значение параметра CHL(1)=6/10=0,6.

3. Оценивается значение глубины усвоенных знаний в рамках блока 1 (характеризующий параметр GLB(1)) вычисляется по формуле GLB(1)=POL(1)*CHL(1).

Комментарий. Значение параметра GLB в блоке 1, т. е. GLB(1) для рассмотренного в пункте 2 примера вычисляется так: GLB(1) = POL(1) * CHL(1)= 0,7 * 0,6 = 0,42.

4. На основе материалов из блока 1, студент самостоятельно решает задачи с номерами 1-6 с общей трудоемкостью S(1)=2 (час/раб) эксперта.

5. Преподаватель оценивает качество решаемых задач 1-6 из блока 1. Оценка производится от 0 до 100 процентов и переводится в шалу от 1 до 5.

Комментарий. Например, студент решил комплекс задач 1-6 по оценке преподавателя на 70%, т.е. его оценка контрольных заданий из блока 1 – КЗ(1)=0,7.

6. Оценивается значение показателя Q - качество освоения компетенции в рамках блока 1:

$Q(1) = 0{,}4 \cdot POL(1) \cdot CHL(1) + 0{,}6 \cdot КЗ(1)$.

Комментарий. Для рассмотренного примера значение показателя $Q(1) = 0{,}40 \cdot 0{,}42 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}588$. как показывает практика, «порог» допустимого значения показателя качества освоения компетенции должен быть выше, чем 0,6. В данном случае, студент не освоил компетенцию в рамках блока 1 с требуемым качеством.

7. Вычисляется уровень развития ABC способностей студента в рамках блока 1 по формуле ABC(1)=S(1)*КЗ(1).

Комментарий. Средняя трудоемкость первого задания ABC(1)=24,16 (мин/раб)*0,7=16, 912 (мин/раб) эксперта.

На рис. 20 приводится диаграмма (неудовлетворительных) достижений студента (штрих-профиль) на фоне требуемых достижений (сплошной профиль) по блоку 1.

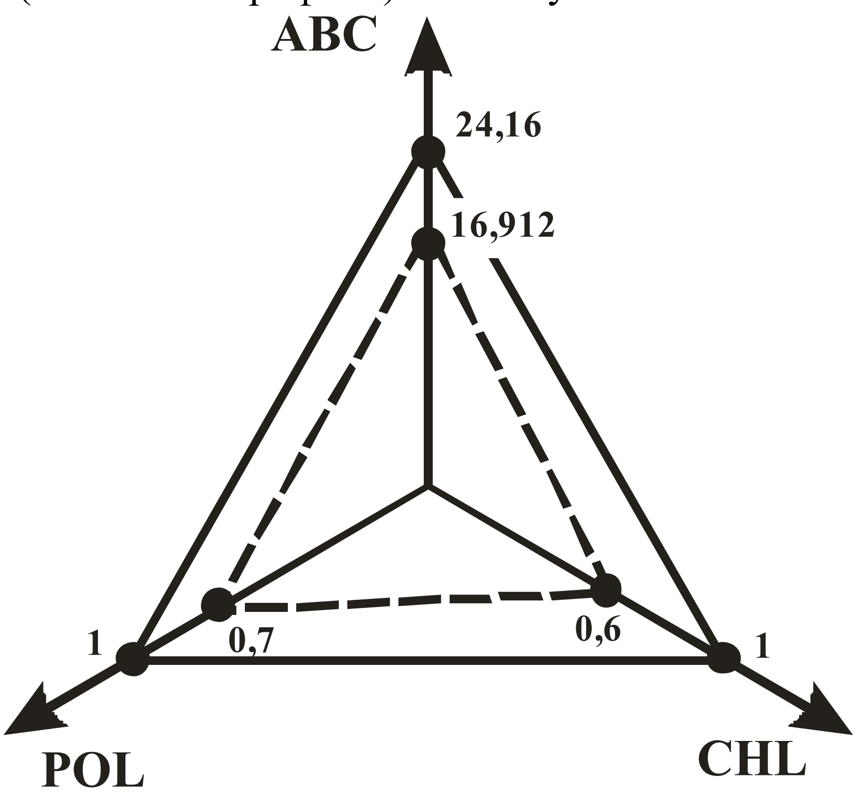


Рис. 20. Диаграмма (штрих-профиль) достижений студента в рамках блока 1

8. Оценки результатов достижений студента в блоке 2 происходит аналогично как в блоке 1 (см. пункты 1-7) с соответствующими блоку 2 данными.

9. Осваивается теоретический материал, который изложен в пунктах 1.4; 1.6 (блок 3).

10. Производится оценка полноты и целостности усвоенного материла из блока 3 с помощью двукратного тестирования:

– тестирование из 5 случайным образом выбранных из базы вопросов (тест 3) на полноту усвоенного материала (вычисляется характеризующий параметр POL(3);

– тестирование из 5 случайным образом выбранных из базы вопросов (тест 3) на целостность усвоенного материала (вычисляется характеризующий параметр CHL(3).

11. Оценивается значение глубины усвоенных знаний в рамках блока 1 (характеризующий параметр GLB(3) вычисляется по формуле GLB(3)=POL(3)*CHL(3)).

Комментарий. Блок 3 содержит только теоретический материал, т.е. задачи для решения отсутствуют.

12. Оценивается значения показателя Q – качества освоения компетенции в рамках блока 3:

Q(3)=POL(3)*CHL(3).

13. Оценка результатов достижений студента в блоке 4 происходит аналогично как в блоке 1 (см. пункты 1-7) с соответствующими блоку 4 данными.

14. Оценка результатов достижений студента в блоке 5 со своими данными происходит аналогично как в блоке 1 (см. пункты 1-7) с соответствующими блоку 5 данными.

15. Оценка результатов достижений студента в блоке 6 со своими данными происходит аналогично как в блоке 1 (см. пункты 1-7) с соответствующими блоку 6 данными.

3.2. Методика расчета показателей достижений студента в освоении компетенции

Пример расчета возможных границ достижений студента при освоении компетенции приводится на рис. 21.

Номер блока	**Q-максимально возможное качество освоения студента**	**Q-минимально допустимое качество освоения студента**
Блок 1	1	0,75
Блок 2	1	0,75
Блок 3	1	0,75
Блок 4	1	0,75
Блок 5	1	0,75
Блок 6	1	0,75
Сумма	6	4,5
Нормированный показатель	1	0,75

Рис. 21. Допустимые границы показателей качества освоения компетенций

Пример перевода значений показателей качества владения компетенций в бальную шкалу:

- ✓ от 0,6 до 0,73 – на удовлетворительном уровне освоил компетенцию;
- ✓ от 0,74 до 0,85 – хорошо;
- ✓ от 0,86 до 1 – отлично.

Комментарий. При предложенной градации интервалов, студент показывает статистически устойчивый результат.

Данные экспериментальной оценки ABC-трудоемкости (сложности) задач (учебных проблем) приводятся на рис. 22.

Номер блока	Номер задачи	Трудоемкость (мин/раб)
Блок 1	1	10
	2	5
	3	10

	4	40
	5	30
	6	50
	Сумма	145
	Среднее	ABC=145/6=24,16
Блок 2	7	10
	8	30
	9	20
	10	30
	11	40
	12	40
	13	15
	14	40
	15	40
	16	60
	Сумма	325
	Среднее	ABC=325/10=32,5
Блок 4	17	10
	18	10
	19	10
	20	10
	21	20
	22	20
	23	30
	24	20
	Сумма	130
	Среднее	ABC=130/8/=16,25
Блок 5	25	60
	26	100
	27	10
	28	60
	29	50

	30	50
	Сумма	330
	Среднее	ABC=330/6=55
Блок 6	31	5
	32	5
	33	5
	34	5
	35	10
	36	10
	37	15
	38	5
	39	5
	40	25
	41	20
	42	20
	43	20
	44	20
	45	15
	46	15
	47	20
	48	30
	49	20
	50	20
	Сумма	290
	Среднее	ABC=290/20=14,5

Рис. 22. Диаграмма значений экспертной оценки ABC-сложности задач

Диаграмма с изображением величин ABC- средних значений трудоемкости задач в учебном пособии (сплошной профиль) и достижения студента в их фоне (штрих-профиль) приводится на рис. 23.

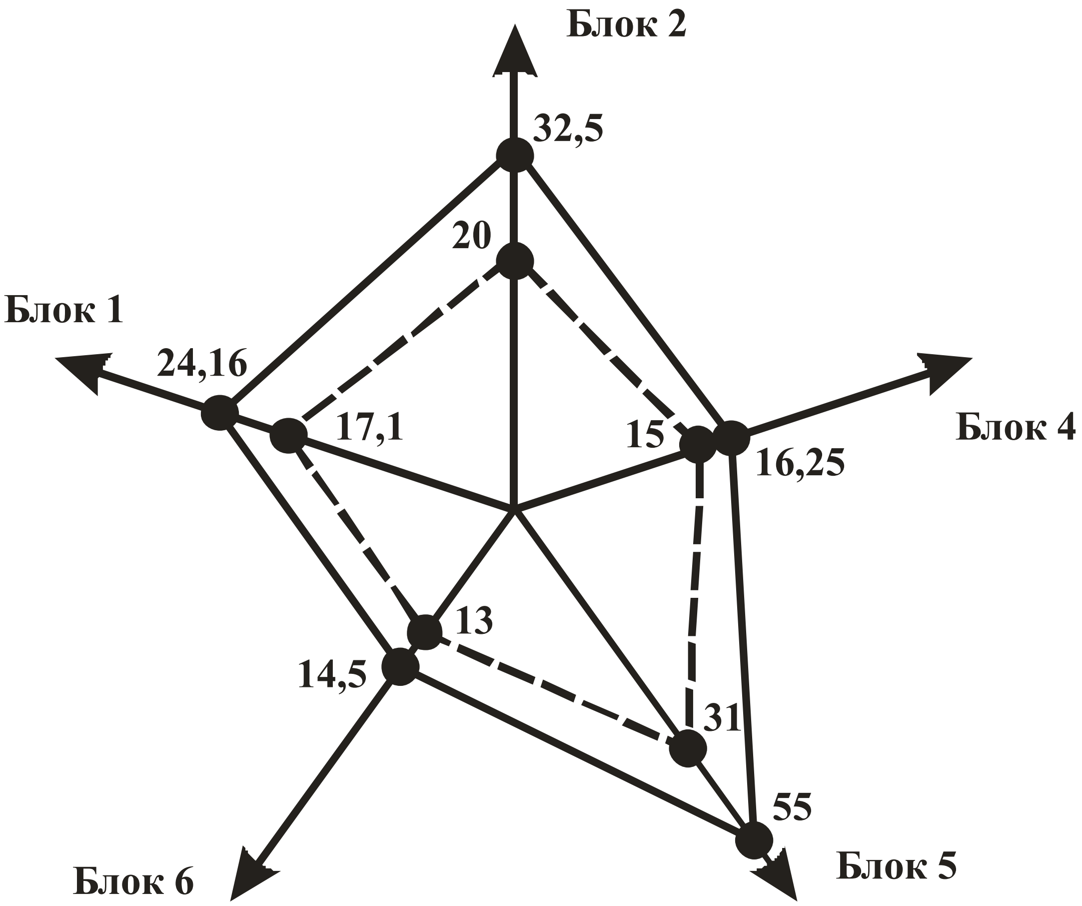


Рис. 23. Средние значения величин ABC- трудоемкости задач в пособии и достижений студента на их фоне

Комментарий. Любое пособие ограничено своим обучающим «потенциалом», т.е. не может помочь в развитии ABC-способнсотей и в освоении знаний больше, чем в него заложено. Из диаграммы видно, что студент для саморазвития не смог использовать весь «потенциал» этого учебного пособия.

3.3. База вопросов для тестового контроля

Блок 1 (пункты 1.1 – 1.3).

Вопросы на полноту усвоенных знаний (параметр POL(1))

1. Рассчитывать параметры парной линейной регрессии можно, если имеется: а) не менее 5 наблюдений; б) не менее 7 наблюдений; в) не менее 10 наблюдений.

2. Какое выражение минимизируется в процедуре метода наименьших квадратов для получения оценок параметров парной линейной регрессии? а) $\sum\left(\hat{y}-\bar{y}\right)^2$; б) $\sum\left(y-\hat{y}\right)^2$; в) $\sum\left(y-\bar{y}\right)^2$.

3. Коэффициент линейного уравнения парной регрессии: а) показывает величину среднего изменение результативной переменной при изменением фактора на одну единицу; б) оценивает статистическую значимость уравнения регрессии; в) показывает, на сколько процентов изменится в среднем результативная переменная, если фактор изменится на 1%.

4. Коэффициента детерминации r_{xy}^2: а) оценивает качество модели из относительных отклонений по каждому наблюдению; б) характеризует долю дисперсии результативного признака y, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака; в) характеризует долю дисперсии y, вызванную влиянием не учтенных в модели факторов.

5. Значимость уравнения регрессии в целом оценивает: а) F-критерий Фишера; б) t-критерий Стьюдента; в) коэффициент детерминации r_{xy}^2.

6. Объясненная (факторная) сумма квадратов отклонений в линейной парной модели имеет число степеней свободы, равное: а) $n-1$; б) 1; в) $n-2$.

7. Общая сумма квадратов отклонений в линейной парной модели имеет число степеней свободы, равное: а) $n-1$; б) 1; в) $n-2$.

8. Какое из уравнений является степенным: а) $y_x = a \cdot b^x$; б) $y_x = a \cdot x^b$: в) $y_x = a + b \cdot x^c$.

9. Коэффициент эластичности показывает: а) на сколько единиц в среднем изменится результативная переменная с изменением фактора на одну единицу; б) на сколько единиц в среднем изменится результативная переменная с изменением фактора на 1%; в) насколько % в среднем изменится результативная переменная с изменением фактора на 1%.

10. Модель вида $y = a + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + ... + b_k \cdot x^k + \varepsilon$ носит название: а) полиномиальная; б) степенная; в) экспоненциальная.

Блок 1(пункты 1.1 – 1.3). Вопросы на целостность усвоенных знаний (параметр CHL(1))

11. На основании данных

Продолжительность хранения (час), x	1	3	6	8	10
Усушка (% к весу горячего хлеба), y	1,6	2,4	2,8	3,2	3,3

о зависимости усушки формового хлеба от продолжительности хранения найти оценки параметров уравнения парной линейной регрессии.

а) $\hat{y} = 1,637 + 0,183x$;

б) $\hat{y} = 2,637 + 0,813x$;

в) $\hat{y} = 0,637 + 1,183x$.

12. На основании данных

Продолжительность хранения (час), x	1	3	6	8	10
Усушка (% к весу горячего хлеба), y	1,6	2,4	2,8	3,2	3,3

о зависимости усушки формового хлеба от продолжительности хранения получены оценки параметров парной линейной регрессии $\hat{y} = 1,637 + 0,183x$. Найти остаточную дисперсию $S^2_{ост}$

а) 1,360;

б) 0,136;

в) 0,0136.

13. На основании данных

Число филиалов торговой фирмы, x	3	5	7	8	11
Товарооборот млн. руб., y	1,2	1,9	3,0	3,6	5,1

о зависимости товарооборота торговой фирмы от числа ее филиалов найти оценки параметров уравнения парной линейной регрессии.

а) $\hat{y} = 0.43 + 0,5x$

б) $\hat{y} = -0,43 + 0,5x$

в) $\hat{y} = 0,43 - 0,5x$

14. На основании данных

Число филиалов торговой фирмы, x	3	5	7	8	11
Товарооборот млн. руб., y	1,2	1,9	3,0	3,6	5,1

о зависимости товарооборота торговой фирмы от числа ее филиалов получены оценки параметров уравнения парной линейной регрессии $\hat{y} = -0{,}43 + 0{,}5x$. Найти величину среднего коэффициента эластичности

а) 0,14;

б) -0,14;

в) 1,14.

15. Для функции $y = a + b \cdot \ln x + \varepsilon$ средний коэффициент эластичности имеет вид

а) $\bar{Э} = \dfrac{b}{a + b \cdot \ln \bar{x}}$;

б) $\bar{Э} = -\dfrac{b}{a \cdot \ln \bar{x} + b}$;

в) $\bar{Э} = -\dfrac{b \cdot \bar{x}}{a + b \cdot \ln \bar{x}}$.

16. Для функции $y = \dfrac{1}{a + b \cdot x + \varepsilon}$ средний коэффициент эластичности имеет вид

а) $\bar{Э} = -\dfrac{b \cdot \bar{x}}{b + a \cdot \bar{x}}$;

б) $\bar{Э} = -\dfrac{a \cdot \bar{x}}{a + b \cdot \bar{x}}$;

в) $\bar{Э} = -\dfrac{b \cdot \bar{x}}{a + b \cdot \bar{x}}$.

17. Степенная модель $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$ может быть приведена к линейному виду с помощью следующего преобразования:

а) замена переменных;

б) логарифмирование обеих частей уравнения;

в) исключение лишних переменных.

18. С помощью какого преобразования кубическая функция $y = a + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 + \varepsilon$ может быть приведена к линейному виду:

а) замена переменных;

б) логарифмирование обеих частей уравнения;

в) исключение лишних переменных.

19. Из модели $\hat{y} = 9,32 \cdot x^{-0,448}$ следует, что при увеличении факторной переменной на 1% $\hat{y}$ в среднем:

а) увеличится на 9,32%

б) уменьшится на 9,32%;

в) уменьшится на 0,488%.

20. Из модели $\hat{y} = 3,29 \cdot x^{0,844}$ следует, что при увеличении факторной переменной на 1% $\hat{y}$ в среднем:

а) увеличится на 3,29%

б) уменьшится на 3,29%;

в) увеличится на 0,844%.

Блок 2 (пункты 1.4).

Вопросы на полноту усвоенных знаний (параметр POL(2))

1. Как влияет на величину коэффициента детерминации добавление в уравнение множественной регрессии новой объясняющей переменной

а) уменьшает значение коэффициента детерминации;

б) увеличивает значение коэффициента детерминации;

в) не оказывает влияния на коэффициент детерминации.

2. Скорректированный коэффициент детерминации:

а) меньше обычного коэффициента детерминации;

б) больше обычного коэффициента детерминации;

в) возможно как то, так и другое.

3. Для построения модели линейной множественной регрессии вида $y = a + b_1x_1 + b_2x_2$ необходимое количество наблюдений должно быть не менее

а) 7;

б) 14;

в) 24.

4. Укажите верную формулу для вычисления среднего коэффициента эластичности результативного признака по i-той факторной переменной

а) $\bar{Э}_i = b_i \cdot \dfrac{\bar{x}_i}{\bar{y}_{x_i}}$;

б) $\bar{Э}_i = b_i \cdot \dfrac{\bar{y}_{x_i}}{\bar{x}_i}$;

в) $\bar{Э}_i = \beta_i \cdot \dfrac{\bar{x}_i}{\bar{y}_{x_i}}$.

5. Выберите верное утверждение:

а) Стандартизованные коэффициенты регрессии β_i позволяют ранжировать факторы по силе их влияния на результативный признак;

б) Стандартизованные коэффициенты регрессии β_i оценивают статистическую значимость факторов;

в) Стандартизованные коэффициенты регрессии β_i численно равны коэффициентам эластичности.

6. Число степеней свободы для остаточной суммы квадратов в линейной модели множественной регрессии равно

а) $n-1$;

б) m;

в) $n-m-1$.

7. Число степеней свободы для факторной суммы квадратов в линейной модели множественной регрессии равно

а) $n-1$;

б) m;

в) $n-m-1$.

8. Выберите верное утверждение:

а) Частные коэффициенты корреляции характеризуют тесноту связи рассматриваемого набора факторов с исследуемым признаком;

б) Частные коэффициенты корреляции содержат поправку на число степеней свободы и не допускают преувеличения тесноты связи;

в) Частные коэффициенты корреляции характеризуют тесноту связи между результатом и соответствующим фактором при элиминировании других факторов, включенных в уравнение регрессии.

9. Частный F-критерий

а) оценивает значимость уравнения регрессии в целом;

б) оценивает целесообразность включения фактора в состав модели;

в) ранжирует факторы по силе их влияния на результат.

10. Величины частных коэффициентов корреляции изменяются в пределах:

а) от $-\infty$ до $+\infty$;

б) от 0 до 1;

в) от –1 до 1.

Блок 2 (пункты 1.4).

Вопросы на целостность усвоенных знаний (параметр CHL(2))

11. При исследовании зависимости себестоимости продукции y от объема выпуска x_1 и производительности труда x_2 по данным $n = 20$ предприятий получено уравнение регрессии: $y = 2,88 - 0,72x_1 - 1,51x_2$. Определите, на сколько единиц в среднем изменится себестоимость продукции, если объем выпуска увеличить на одну единицу.

а) увеличится на 2,88;

б) уменьшится на 0,72;

в) увеличится на 0,72.

12. При исследовании зависимости себестоимости продукции y от объема выпуска x_1 и производительности труда x_2 по данным $n = 20$ предприятий получено уравнение регрессии:

$y = 2,88 - 0,72x_1 - 1,51x_2$. Определите, на сколько единиц в среднем изменится себестоимость продукции, если производительность увеличить на одну единицу.

а) уменьшится на 2,88;

б) увеличится на 1,51;

в) уменьшится на 1,51.

13. При исследовании зависимости себестоимости продукции y от объема выпуска x_1 и производительности труда x_2 по данным $n = 20$ предприятий получено уравнение регрессии: $y = 2,88 - 0,72x_1 - 1,51x_2$. Определите, на сколько процентов в среднем изменится себестоимость продукции, если объем выпуска увеличить на 1%, учитывая при этом, что $\overline{y} = 3$, $\overline{x}_1 = 0,3$, $\overline{x}_2 = 0,2$.

а) уменьшится на 0,072%;

б) уменьшится на 0,72%;

в) уменьшится на 7,2%.

14. При исследовании зависимости себестоимости продукции y от объема выпуска x_1 и производительности труда x_2 по данным $n = 20$ предприятий получено уравнение регрессии: $y = 2,88 - 0,72x_1 - 1,51x_2$. Определите, на сколько процентов в среднем изменится себестоимость продукции, если производительность труда увеличить на 1%, учитывая при этом, что $\overline{y} = 3$, $\overline{x}_1 = 0,3$, $\overline{x}_2 = 0,2$.

а) уменьшится на 0,101%;

б) уменьшится на 1,51%;

в) уменьшится на 0,151%.

15. Множественный коэффициент корреляции $R_{yx_1x_2} = 0,9$. Определите, какой процент дисперсии зависимой переменной y объясняется влиянием факторов x_1 и x_2:

а) 90%;

б) 81%;

в) 19%.

16. Известны парные коэффициенты корреляции: $r_{yx_1} = 0,91$, $r_{yx_2} = 0,75$, $r_{x_1x_2} = 0,58$. Вычислить частные коэффициенты корреляции $r_{yx_1 \cdot x_2}$ и $r_{yx_2 \cdot x_1}$.

а) $r_{yx_1 \cdot x_2} = 0,882$, $r_{yx_2 \cdot x_1} = 0,658$;

б) $r_{yx_1 \cdot x_2} = 0,928$, $r_{yx_2 \cdot x_1} = 0,758$;

в) $r_{yx_1 \cdot x_2} = 0,782$, $r_{yx_2 \cdot x_1} = 0,558$.

17. Найдите значение критерия Фишера для линейной трехфакторной регрессионной модели, полученной по результатам 30 наблюдений, если величина индекса множественной корреляции $R = 0,9$.

а) 78

б) 36,9

в) 38,4

18. Найдите значение частного критерия Фишера для переменной x_i, если величина t - критерия для соответствующего коэффициента регрессии равна 4.57.

а) 20,9

б) 2,14

в) 12.78.

19. Чему равна величина скорректированного коэффициента множественной детерминации для трехфакторной модели, полученной по результатам 30 наблюдений, если величина обычного коэффициента детерминации $R^2 = 0,8$.

а) 0,892

б) 0,714

в) 0,777

20. Известны парные коэффициенты корреляции $r_{yx_1} = 0,92;$ $r_{yx_2} = 0,8;$ $r_{x_1x_2} = 0,82$. Вычислить частные коэффициенты корреляции $r_{yx_1 \cdot x_2}$ и $r_{yx_2 \cdot x_1}$.

а) $r_{yx_1 \cdot x_2} = 0{,}719$; $r_{yx_2 \cdot x_1} = 0{,}425$;

б) $r_{yx_1 \cdot x_2} = 0{,}864$; $r_{yx_2 \cdot x_1} = 0{,}308$;

в) $r_{yx_1 \cdot x_2} = 0{,}769$; $r_{yx_2 \cdot x_1} = 0{,}203$.

Блок 3 (пункты 1.5 – 1.6). Вопросы на полноту усвоенных знаний (параметр POL(3))

1. Эффективность оценки параметра регрессии полученной с помощью метода наименьших квадратов означает

а) что она характеризуется наименьшей дисперсией;

б) что математическое ожидание остатков равно нулю;

в) увеличение ее точности с увеличением объема выборки.

2. Состоятельность оценки параметра регрессии полученной с помощью метода наименьших квадратов означает

а) что она характеризуется наименьшей дисперсией;

б) что математическое ожидание остатков равно нулю;

в) увеличение ее точности с увеличением объема выборки.

3. Если математическое ожидание остатков равно нулю, то такая оценка называется:

а) состоятельной;

б) несмещенной;

в) эффективной.

4. Укажите верное утверждение:

а) скорректированный и обычный коэффициенты множественной детерминации совпадают, когда наблюдения гомоскедастичны;

б) стандартные ошибки коэффициентов регрессии определяются значениями всех параметров регрессии;

в) при наличии гетероскедастичности оценки параметров регрессии становятся смещенными.

5. При наличии гетероскедастичности для отыскания оценок параметров уравнения регрессии следует применять

а) обычный МНК;

б) обобщенный МНК;

в) метод максимального правдоподобия.

6. При построении графика зависимости остатков от теоретических значений результативной переменной получена горизонтальная полоса. Это означает, что

а) остатки носят случайный характер;

б) остатки носят неслучайный характер;

в) остатки подчиняются нормальному распределению.

7. Выберите верное утверждение:

а) Фиктивные переменные – это атрибутивные признаки такие, как профессия, пол, образование), которым придали цифровые метки;

б) фиктивные переменные – это экономические переменные, принимающие количественные значения в строго определенном интервале;

в) фиктивными переменными называются значения зависимой переменной за предшествующий период времени.

8. Если качественный фактор имеет четыре качественных уровня, то необходимое число фиктивных переменных равно:

а) 4;

б) 3;

в) 2.

9. Возможно ли построение уравнения регрессии, в которой дихотомический признак является результативной переменной?

а) да;

б) нет;

в) только в том случае, когда в числе объясняющих переменных нет фиктивных переменных.

10. Что из перечисленного ниже относится к предпосылкам метода наименьших квадратов?

а) случайный характер остатков;

б) гетероскедастичность;

в) отсутствие автокорреляции остатков:

г) равномерное распределение остатков.

Блок 3 (пункты 1.5 – 1.6).

Вопросы на целостность усвоенных знаний (параметр CHL(3))

11. Могут ли наблюдения не обладающие свойством несмещенности быть состоятельными и эффективными?

а) да;

б) нет;

в) могут быть только состоятельными.

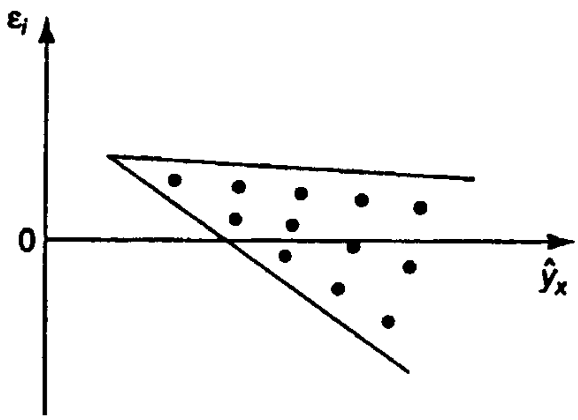
12. Если остатки не будут обладать нормальным распределением, то:

а) будет нарушена гомоскедастичность;

б) нельзя использовать метод наименьших квадратов;

в) нельзя использовать критерии Фишера и Стьюдента для оценок регрессионной модели.

13. На рисунке изображена зависимость остатков от расчетных значений результативной переменной:



в какой области будут находиться значения коэффициентов пропорциональности K_i при реализации процедуры обобщенного метода наименьших квадратов?

а) в области отрицательных чисел;

б) в области положительных чисел больших или равных единице;

в) в области положительных чисел меньших или равных единице.

14. Пусть y – объем производства, x_1 – величина издержек, x_2 – основные производственные фонды, x_3 – численность работников, тогда уравнение $y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + e$ является моделью производства с объемными факторами. В трансформированной модели $\frac{y}{x_3} = b_3 + b_1\frac{x_1}{x_3} + b_2\frac{x_2}{x_3} + \varepsilon$ переменная y/x_3 это:

а) затраты на одного работника;

б) производительность труда;

в) фондовооруженность труда.

15. Пусть y – объем производства, x_1 – величина издержек, x_2 – основные производственные фонды, x_3 – численность работников, тогда уравнение $y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + e$ является моделью издержек производства с объемными факторами. В трансформированной модели $\frac{y}{x_3} = b_3 + b_1\frac{x_1}{x_3} + b_2\frac{x_2}{x_3} + \varepsilon$ переменная $\frac{x_2}{x_3}$ это:

а) затраты на одного работника;

б) производительность труда;

в) фондовооруженность труда.

16. При изучении продолжительности непрерывного стажа работы на одном предприятии рассматривались следующие факторы: пол, размер заработной платы, категория вредности производства, образование, расстояние до места проживания, семейное положение. Какие из этих факторов требуют введения фиктивных переменных?

а) пол, образование, семейное положение;

б) пол, образование, категория вредности производства, семейное положение;

в) пол, семейное положение, образование, расстояние до места проживания.

17. При изучении спроса на мороженое исследовалась зависимость объема продаж y тыс. шт. от цены x руб/тыс.шт. и

формы выпуска: брикет, вафельный стаканчик, на палочке. Были введены две фиктивные переменные: $z_1 = 1$ если форма выпуска вафельный стаканчик, $z_2 = 1$ если форма выпуска на палочке. Модель линейной регрессии по этой схеме имеет вид: $\hat{y} = 2550 - 0{,}06x + 1100z_1 + 750z_2$. На сколько в среднем спрос на мороженое в стаканчиках выше, чем на палочках?

а) на 350;

б) на 900;

в) на 750.

18. При изучении спроса на мороженое исследовалась зависимость объема продаж y тыс. шт. от цены x руб/тыс. шт и формы выпуска: брикет, вафельный стаканчик, на палочке. Были введены две фиктивные переменные: $z_1 = 1$ если форма выпуска вафельный стаканчик, $z_2 = 1$ если форма выпуска на палочке. Модель линейной регрессии по этой схеме имеет вид: $\hat{y} = 2550 - 0{,}06x + 1100z_1 + 750z_2$. Цена на мороженое в стаканчиках установлена 40000 руб/тыс. шт. Какую цену следует установить на мороженое в брикетах и мороженое на палочках, чтобы величина спроса на все виды мороженого была одинаковой?

а) 37600 руб/тыс.шт. и 38450 руб/тыс.шт.;

б) 35050 руб/тыс.шт. и 35800 руб/тыс.шт.;

в) 21700 руб/тыс.шт. и 34200 руб/тыс.шт.

19. Для исследования урожайности трех сортов картофеля A, B и C было построено регрессионное уравнение $\hat{y} = a + b_0x + b_1z_1 + b_2z_2$, где x - влагосодержание почвы кг/м^2, $z_1 = 1$ для картофеля сорта B, $z_2 = 1$ для картофеля сорта C. Какой смысл в этой модели имеет параметр a?

а) показывает среднюю урожайность картофеля сорта a;

б) показывает урожайность, усредненную по всем сортам картофеля;

в) не имеет экономической интерпретации.

20. Для изучения эффективности способов торговли была построена регрессионная модель зависимости товарооборота y тыс. руб. от трех способов торговли: обычного, выездного $z_1 = 1$, через специализированный магазин $z_1 = 1$. Ее вид $\hat{y} = a + b_1 z_1 + b_2 z_2$. Какой смысл в этой модели имеет параметр a?

а) показывает величину среднего товарооборота обычного способа торговли;

б) показывает усредненную величину товарооборота по всем способам торговли;

в) не имеет экономической интерпретации.

Блок 4 (пункт 1.7).

Вопросы на полноту усвоенных знаний (параметр POL(4))

1. Эндогенными называются:

а) предопределенные переменные, влияющие на зависимые переменные, но не зависящие от них;

б) зависимые переменные, число которых равно числу уравнений в системе;

в) значения зависимых переменных за предшествующий период времени.

2. Экзогенными называются:

а) предопределенные переменные, влияющие на зависимые переменные, но не зависящие от них;

б) зависимые переменные, число которых равно числу уравнений в системе;

в) значения зависимых переменных за предшествующий период времени.

3. Модель является идентифицируемой, если

а) число параметров приведенной формы модели меньше числа структурных коэффициентов;

б) число параметров приведенной формы модели больше числа структурных коэффициентов;

в) число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной формы модели.

4. Модель является неидентифицируемой, если

а) число параметров приведенной формы модели меньше числа структурных коэффициентов;

б) число параметров приведенной формы модели больше числа структурных коэффициентов;

в) число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной формы модели.

5. Уравнение системы взаимозависимых уравнений неидентифицируемо, если

а) $D+1<H$;

б) $D+1=H$;

в) $D+1>H$.

6. Уравнение системы взаимозависимых уравнений сверхидентифицируемо, если

а) $D+1<H$;

б) $D+1=H$;

в) $D+1>H$.

7. Для определения параметров сверхидентифицируемой модели применяется:

а) двушаговый метод наименьших квадратов;

б) обобщенный метод наименьших квадратов;

в) ни один из известных методов применить нельзя.

8. Сколько эндогенных переменных может входить в состав системы шести взаимозависимых эконометрических уравнений?

а) шесть;

б) не более шести;

в) любое количество.

9. Сколько экзогенных переменных может входить в состав системы шести взаимозависимых эконометрических уравнений?

а) шесть;

б) не более шести;

в) любое количество.

10. Выберите верное утверждение:

а) в системе взаимозависимых эконометрических уравнений число эндогенных переменных должно быть равно числу экзогенных;

б) в системе взаимозависимых эконометрических уравнений число эндогенных переменных должно быть меньше или равно числа экзогенных;

в) в системе взаимозависимых эконометрических уравнений число эндогенных переменных должно быть больше или равно числа экзогенных;

г) в системе взаимозависимых эконометрических уравнений число эндогенных переменных может быть как больше так и меньше числа экзогенных.

Блок4 (пункт 1.7).

Вопросы на целостность усвоенных знаний (параметр CHL(4))

11. Простейшая статическая модель потребления Кейнса имеет вид: C= a+bY

Y=C+I,

где C – величина непроизводственного потребления; Y – доход; I-объем инвестиций. Приведенная форма этой модели имеет вид:

C= A+BI

$Y=A^1+B^1I$.

Найти коэффициенты первого уравнения приведенной формы модели A и B, если a= 250$ b=0,6.

а) A=625; B=1,5;

б) A=416,7; B=1;

в) A= 425; B=2,5.

12. Простейшая статическая модель потребления Кейнса имеет вид: C= a+bY

Y=C+I,

где C – величина непроизводственного потребления; Y – доход; I-объем инвестиций. Приведенная форма этой модели имеет вид:

C= A+BI

$Y = A^1 + B^1 I$.

Найти коэффициенты второго уравнения приведенной формы модели A^1 и B^1, если a= 250$ b=0,6.

а) A1=416,7; B1=1;

б) A1=625; B1=2,5;

в) A1=575; B1=1,5.

13. Если в системе взаимозависимых эконометрических уравнений число эндогенных переменных совпадает с числом экзогенных переменных, то какое из нижеперечисленных утверждений верно?

а) система идентифицируема;

б) система идентифицируема, или неидентифицируема;

в) система идентифицируема, или сверхидентифицируема;

г) на основании только этих сведений ничего определенного утверждать нельзя.

14. Макроэкономическая модель Клейна имеет вид:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{12}Y_t + b_{13}T_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{24}K_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t, \end{cases}$$

где C – потребление; I – инвестиции; Y – доход; T – налоги; K – запас капитала; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период. Оценить идентифицируемость каждого уравнения системы.

а) первое и второе уравнения идентифицируемы, третье балансовое тождество;

б) первое уравнение сверхидентифицируемо, второе идентифицируемо, третье балансовое тождество;

в) первое и второе уравнения сверхидентифицируемы, третье балансовое тождество.

15. Одна из версий модели Кейнса имеет вид:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}Y_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – потребление; Y – ВВП; I – валовые инвестиции; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период. Оценить идентифицируемость каждого уравнения системы.

а) первое и второе уравнения идентифицируемы, третье балансовое тождество;

б) первое уравнение идентифицируемо, второе сверхидентифицируемо, третье балансовое тождество;

в) первое и второе уравнения сверхидентифицируемы, третье балансовое тождество.

16. Модель денежного и товарного рынков имеет вид:

$$\begin{cases} R_t = a_1 + b_{12}Y_t + b_{14}M_t + \varepsilon_1, \\ Y_t = a_2 + b_{21}R_t + b_{23}I_t + b_{25}G_t + \varepsilon_2, \\ I_t = a_3 + b_{31}R_t + \varepsilon_3, \end{cases}$$

где R – процентные ставки; Y – реальный ВВП; M – денежная масса; I – внутренние инвестиции; G – реальные государственные расходы. Оценить идентифицируемость каждого уравнения системы.

а) первое уравнение идентифицируемо, второе сверхидентифицируемо, третье неидентифицируемо;

б) первое уравнение сверхидентифицируемо, второе идентифицируемо, третье балансовое тождество;

в) первое уравнение идентифицируемо, второе неидентифицируемо, третье сверхидентифицируемо.

17. Макроэкономическая модель имеет вид

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}D_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{22}Y_t + b_{23}Y_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = D_t + T_t, \\ D_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – расходы на потребление; Y – чистый национальный продукт; D – чистый национальный доход; I – инвестиции; T – косвенные налоги; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период. Оценить идентифицируемость каждого уравнения системы.

а) первое уравнение идентифицируемо, второе сверхидентифицируемо, третье и четвертое балансовые тождества;

б) первое и второе уравнения сверхидентифицируемы, третье и четвертое балансовые тождества;

в) первое и второе уравнения сверхидентифицируемы, третье и четвертое идентифицируемы.

18. Модель денежного рынка имеет вид:

$$\begin{cases} R_t = a_1 + b_{11}M_t + b_{12}Y_t + +\varepsilon_1, \\ Y_t = a_2 + b_{21}R_t + b_{22}I_t + \varepsilon_2, \\ I_t = a_3 + b_{33}R_t + \varepsilon_3, \end{cases}$$

где R – процентные ставки; Y – ВВП; M – денежная масса; I – внутренние инвестиции. Оценить идентифицируемость каждого уравнения системы.

а) первое и второе уравнения неидентифицируемы, третье идентифицируемо;

б) все три уравнения идентифицируемы;

в) первое и третье уравнения идентифицируемы, второе неидентифицируемо,

19. Конъюнктурная модель имеет вид:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}C_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}r_t + b_{22}I_{t-1} + \varepsilon_2, \\ r_t = a_3 + b_{31}Y_t + b_{32}M_t + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – расходы на потребление; Y – ВВП; I – инвестиции; r – процентная ставка; M – денежная масса; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период. Оценить идентифицируемость каждого уравнения системы.

а) первые три уравнения идентифицируемы, четвертое балансовое тождество;

б) первое и второе уравнения свехидентифицируемы, третье идентифицируемо, четвертое балансовое тожлество;

в) первые три уравнения сверхидентифицируемы, четвертое балансовое тождество.

20. Модель Менгеса имеет вид:

$$Y_t = a_1 + b_{11}Y_{t-1} + b_{12}I_t + \varepsilon_1$$
$$I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{22}Q_t + \varepsilon_2$$
$$C_t = a_3 + b_{31}Y_t + b_{32}C_{t-1} + b_{33}P_t + \varepsilon_3,$$
$$Q_t = a_4 + b_{41}Q_{t-1} + b_{42}R_t + \varepsilon_t$$

где Y - национальный доход, C - расходы на личное потребление, I - частные инвестиции, Q - валовая прибыль экономики, P - индекс стоимости жизни, R - объем промышленного производства, t - текущий период времени, $t-1$ - предыдущий период времени. Оценить идентифицируемость каждого уравнения системы.

а) все уравнения идентифицируемые;

б) все уравнения сверхидентифицируемые;

в) все уравнения неидентифицируемые;

г) первое, второе и четвертое уравнения идентифицируемые, третье сверхидентифицируемое.

Блок 5 (пункт 1.8).

Вопросы на полноту усвоенных знаний (параметр POL(5))

1. Аддитивная модель временного ряда имеет вид

а) $Y = T \cdot S \cdot E$;

б) $Y = T + S + E$;

в) $Y = T \cdot S + E$.

2. 2. Коэффициент автокорреляции характеризует;

а) тесноту линейной связи текущего и одного из предшествующих уровней временного ряда;

б) тесноту нелинейной связи текущего и одного из предшествующих уровней временного ряда;

в) наличие или отсутствие тенденции временного ряда.

3. Укажите уравнение степенного тренда:

а) $y_t = a \cdot t^b$;

б) $y_t = a + \frac{b}{t}$;

в) $y_t = a \cdot b^t$.

4. Укажите уравнение показательного тренда:

а) $y_t = a \cdot t^b$;

б) $y_t = a + \frac{b}{t}$;

в) $y_t = a \cdot b^t$.

5. Мультипликативная модель временного ряда принимается в том случае, когда:

а) значения сезонной компоненты приблизительно постоянно для различных циклов;

б) амплитуда сезонных колебаний от цикла к циклу возрастает или уменьшается;

в) во временном ряду тенденция отсутствует или крайне незначительна.

6. Метод скользящего среднего применяется для:

а) устранения влияния трендовой составляющей временного ряда;

б) устранения влияния циклической (сезонной) составляющей временного ряда;

в) устранения влияния случайной составляющей временного ряда.

7. Критерий Дарбина-Уотсона применяется для:

а) определения автокорреляции в остатках;

б) определения наличия или отсутствия сезонных колебаний;

в) для оценки существенности построенной модели.

8. Метод отклонения от тренда применяется для:

а) устранения влияния трендовой составляющей временного ряда;

б) устранения влияния циклической (сезонной) составляющей временного ряда;

в) устранения влияния случайной составляющей временного ряда.

9. На основе поквартальных данных построена аддитивная модель временного ряда. Скорректированные значения сезонной компоненты за первые три квартала равны: 7 – I квартал, 9 – II квартал и –11 – III квартал. Чему равно значение сезонной компоненты за IV квартал?

а) 5;

б) –4;

в) –5.

10. На основе поквартальных данных построена мультипликативная модель временного ряда. Скорректированные значения сезонной компоненты за первые три квартала равны: 0,7 – I квартал, 1,1 – II квартал и 1,4 – III квартал. Значение сезонной компоненты за IV квартал есть

а) 0,7;

б) 0,8;

в) 0,9.

Блок 5 (пункт 1.8).

Вопросы на целостность усвоенных знаний (параметр CHL(5))

11. По данным таблицы

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t	7,1	7,3	7,0	7,7	8,1	8,5	8,5	8,9	9,2	9,3	10,0	11,2

рассчитать коэффициент автокорреляции 2-го порядка временного ряда.

а) 0,8159;

б) 0,9118;

в) 0,9566.

12. По данным таблицы

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t	9,4	9,1	9,0	8,7	8,1	7,5	7,2	6,9	6,8	6,6	5,4	4,2

рассчитать коэффициент автокорреляции 2-го порядка временного ряда.

а) 0,9753;

б) 0,9132;

в) 0,8723.

13. На основе поквартальных данных за 4 года ($t = \overline{1, 16}$) найдено уравнение линейного тренда $T = 8,35 + 1,17 \cdot t$. Сделать прогноз на первый квартал следующего года.

а) 30,58.

б) 29,41;

в) 28,24.

14. На основе поквартальных данных за 4 года ($t = \overline{1, 16}$) найдено уравнение линейного тренда $T = 8,35 + 1,17 \cdot t$. Сделать прогноз на второй квартал следующего года.

а) 30,58.

б) 29,41;

в) 28,24.

15. Для некоторой аддитивной модели временного ряда найдены средние оценки сезонной компоненты: $\overline{S}_1 = 28,5$, $\overline{S}_2 = 17,3$, $\overline{S}_3 = -23,1$, $\overline{S}_4 = -21,7$. Чему равна в этой модели величина корректирующего коэффициента?

а) 0,25;

б) 0,35;

в) 0,45.

16. Для некоторой мультипликативной модели временного ряда найдены средние оценки сезонной компоненты: $\overline{S}_1 = 1{,}23;$ $\overline{S}_2 = 0{,}92;$ $\overline{S}_3 = 1{,}09;$ $\overline{S}_4 = 0{,}84$. Чему равна в этой модели величина корректирующего коэффициента?

а) 1,08;

б) 0,98;

в) 0,958.

17. Для некоторого временного ряда вычислены четыре коэффициента автокорреляции $r^1 = 0{,}358;$ $r^2 = 0283;$ $r^3 = -0{,}14;$ $r^4 = 0{,}326$. Какой вывод можно сделать на основании этих данных о структуре временного ряда?

а) в структуре ряда преобладает трендовая составляющая;

б) в структуре ряда преобладает циклическая составляющая;

в) в структуре ряда преобладает случайная составляющая.

18. После введения в состав модели фактора времени было получено линейное уравнение регрессии $\hat{y}_t = 35{,}3 + 0{,}8x_t + 0{,}7t$. Какой вывод при это будет верным?

а) с ростом фактора x на единицу переменная y возрастает в среднем на 0,8 при условии неизменного тренда;

б) с ростом фактора x на 1% переменная y возрастает в среднем на 0,8 % при условии неизменного тренда;

в) с ростом фактора x на единицу переменная y возрастает в среднем на 0,8 за 0,7 единиц временного лага.

19. При выполнении процедуры сглаживания методом скользящей средней вычисление центрированного скользящего среднего выполняется:

а) всегда:

б) только когда циклическая составляющая характеризуется четным числом единиц временного лага;

в) только когда циклическая составляющая имеет период больший или равный четырем единицам временного лага.

20. Для двух временных рядов $\{x_t\}$ и $\{y_t\}$ были вычислены коэффициенты автокорреляции первого порядка $r_x^1 = 0{,}947$; $r_y^1 = 0{,}925$. После использования метода отклонения от тренда коэффициенты автокорреляции для рядов остатков составили $r_{\Delta x}^1 = 0{,}784$; $r_{\Delta y}^1 = 0{,}402$. Удалось ли устранить влияние трендов?

а) удалось устранить для обоих рядов;

б) удалось устранить только для ряда $\{y_t\}$;

в) ни для одного ряда устранить влияние тренда не удалось.

Блок 6 (пункты 2.1 – 2.5).

Вопросы на полноту усвоенных знаний (параметр POL(6))

1. Что называется бюджетным множеством?

а) Множество наборов товаров, стоимость которых при данном векторе цен не превышает величины дохода.

б) Сумма денег, которой располагает потребитель для приобретения товаров.

в) Максимальная сумма денег, которую может израсходовать потребитель на приобретение товаров.

2. Какие из перечисленных утверждений верны:

а) Функция полезности неубывающая.

b) Если функция полезности u дифференцируема, то $\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$

c) Функция полезности ограничена.

d) Функция полезности выпукла.

3. Как математически записывается выражение, означающее предельную полезность товара?

а) $\frac{\partial u}{\partial x_i}$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$;

в) $grad \quad U$.

4. Что представляет собой точка спроса?

а) Сумма денег, необходимая для приобретения товарного набора задачи потребителя.

б) Вектор цен, при котором стоимость товарного набора задачи потребителя минимальна.

в) Состав товарного набора, определяющий решение задачи потребителя.

5. Какие из перечисленных утверждений верны?

а) Производственная функция вогнута.

б) Производственная функция неограниченна.

в) Производственная функция выпукла.

г) Производственная функция нечетна.

6. Свойство убывающего предельного продукта означает:

а) Снижение эффективности любого вида затрат по мере их наращивания.

б) Снижение объема производства по мере снижения любого вида затрат.

в) Снижение объема производства по мере увеличения цены любого вида ресурса.

7. Величина оптимального потребления любого ресурса является:

а) возрастающей функцией его цены;

б) убывающей функцией его цены;

в) вогнутой функцией его цены.

8. Какие функции называются функциями с постоянной отдачей от масштаба?

а) функции, в которых одновременное изменение всех независимых переменных в одно и тоже число раз приводит к аналогичному изменению функции.

б) функции, в которых увеличение любой независимой переменной на единицу приводит к изменению функции на один процент.

в) функции, темп изменения которых постоянен во времени.

9. Каким принимается темп роста трудовых ресурсов в модели Солоу?

а) линейным

б) логарифмическим.

в) экспоненциальным

10. Сколько точек равновесной капиталовооруженности существует в модели Солоу при заданной норме сбережений, норме амортизации и темпе роста трудовых ресурсов?

а) одна

b) ни одной

c) бесчисленное множество.

11. Что такое золотая норма сбережения?

а) норма сбережения, при которой достигается максимум удельного потребления

б) норма сбережения, при которой достигается максимум величины равновесной капиталовооруженности.

в) норма сбережения, при которой положения равновесной капиталовооруженности устойчиво.

12. Что такое норма амортизации?

а) количество капитала, теряемого в единицу в

б) доля капитала, теряемого в единицу времени.

в) количество капитала, вводимого в экономику взамен утраченного.

13. Каким показателем характеризуется объем производственного потребления экономической системы?

а) валовым промежуточным продуктом

б) конечным продуктом

в) совокупным общественным продуктом.

14. Выберите верное утверждение, характеризующее матрицу коэффициентов прямых затрат.

а) квадратная неотрицательная матрица;

б) кососимметричная матрица4

в) треугольная неотрицательная матрица.

15. На основании каких данных рассчитываются отчетные коэффициенты прямых затрат?

а) на основании договоров о поставках, заключенных между отраслями.

б) на основании теоретических представлений.

в) на основании данных, полученных по итогам истекшего хозяйственного периода.

16. Система уравнений межотраслевого баланса является:

а) системой линейных дифференциальных уравнений;

б) системой линейных алгебраических уравнений;

в) системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

г) системой взаимозависимых эконометрических уравнений.

17. Выберите верные утверждения, касающиеся матрицы коэффициентов полных материальных затрат:

а) все коэффициенты полных материальных затрат положительные числа меньше единицы;

б) все коэффициенты полных материальных затрат неотрицательны;

в) матрица коэффициентов полных материальных затрат квадратная.

18. Выберите верные утверждения, касающиеся конечного общественного продукта.

а) часть его направляется на пополнение основных фондов;

б) величина конечного продукта больше или равна величины промежуточного продукта;

в) часть конечного продукта отрасли используется на непроизводственное потребление,

19. Выберите верные утверждения, касающиеся непроизводственного потребления.

а) непроизводственное потребление есть линейная функция равновесной ставки банковского процента;

б) непроизводственное потребление есть линейная функция располагаемого дохода;

в) непроизводственное потребление обратно пропорционально уровню стоимости жизни;

г) непроизводственное потребление возрастает с уменьшением налогов.

20. Выберите верные утверждения, касающиеся величины сбережений.

а) величина сбережений есть возрастающая функция ставки банковского процента;

б) величина сбережений есть убывающая функция ставки банковского процента;

в) величина сбережений не зависит от ставки банковского процента;

г) величина сбережений есть линейная функция ставки банковского процента.

21. Как изменяется величина равновесной ставки банковского процента с увеличением государственных расходов?

а) уменьшается;

б) увеличивается;

в) величина равновесной ставки банковского процента не связана с государственными расходами.

22. Что характеризует точка пересечения линий, образующих крест Кейнса?

а) положение равновесной капиталовооруженности;

б) положение равновесной ставки банковского процента;

в) равенство планируемых расходов и фактических доходов.

23. Выберите верные утверждения, характеризующие задачу управления портфелем ценных бумаг в постановке Марковица.

а) это задача квадратичного программирования;

б) это задача динамического программирования;

в) это задача безусловной оптимизации;

г) это задача условной оптимизации.

24. Что является характеристикой эффективности портфеля ценных бумаг?

а) суммарная доходность всех видов ценных бумаг, входящих в состав портфеля;

б) доходность рисковой части ценных бумаг, входящих в состав портфеля;

в) суммарная стоимость всех видов ценных бумаг, входящих в состав портфеля.

25. Что служит характеристикой рискованности ценной бумаги в модели Марковица?

а) вероятность получения заявленного дохода;

б) величина среднего квадратичного отклонения ее эффективности;

в) величина коэффициента вариации ее эффективности,

26. Выберите верные утверждения, характеризующие пространство товаров в модели фон Неймана?

а) это неотрицательный ортант конечномерного пространства;

б) это линейное векторное пространство;

в) это пространство бесконечной размерности,

27. Какие из перечисленных утверждений верно характеризуют матрицу затрат в модели фон Неймана?

а) это квадратная матрица;

б) это матрица симметрична относительно главной диагонали;

в) это невырожденная матрица;

г) это неотрицательная матрица.

28. Какие из перечисленных утверждений верно характеризуют матрицу выпуска в модели фон Неймана?

а) это квадратная матрица;

б) это матрица симметрична относительно главной диагонали;

в) это невырожденная матрица;

г) это неотрицательная матрица.

29. Укажите верные утверждения, характеризующие понятие базисного производственного процесса.

а) это упорядоченная пара векторов из пространства товаров;

б) это набор технологических коэффициентов, задающих процесс переработки одних продуктов в другие;

в) он преобразует вектор затрат в вектор выпуска.

30. Для чего в модели фон Неймана используется вектор интенсивностей?

а) для изменения отношения «затраты/выпуск»;

б) для получения линейной комбинации базисных производственных процессов;

в) для разделения базисных производственных процессов на главные и второстепенные.

Блок 6 (пункты 2.1 – 2.5).

Вопросы на целостность усвоенных знаний (параметр CHL(5))

31. Какие из перечисленных функций могут быть использованы в качестве производственных, если у – объем выпуска продукции, а х – количество использованного ресурса?

а) $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = 3x^2 - 1$; в) $y = e^x$

а) только а;

б) а и b;

в) а и с;

г) ни одна из перечисленных.

32. Какие ресурсы называются малоценными?

а) спрос, на которые уменьшается с ростом цены товарной продукции;

б) спрос, на которые возрастает с ростом цены товарной продукции;

в) цена которых уменьшается с ростом цены товарной продукции.

33. Какие переменные являются аргументами функции предложения продукции?

а) цена продукции и ее себестоимость;

б) цена продукции и объем ее выпуска;

в) цена продукции и цены на ресурсы, используемые при ее производстве.

34. Выберите верное утверждение.

а) решение задачи потребителя принадлежит границе бюджетного множества;

б) решение задачи потребителя является внутренней точкой бюджетного множества;

в) решение задачи потребителя может быть любой точкой бюджетного множества.

35. Что представляет собой геометрически бюджетное множество в пространстве трех товаров, если общая сумма денег равна Q, а вектор цен $p=(p_1, p_2, p_3)$?

а) прямоугольный параллелепипед;

б) пирамиду;

в) часть плоскости, пересекающей оси координат в точках $\left(\frac{Q}{p_1}, 0, 0\right)$; $\left(0, \frac{Q}{p_2}, 0\right)$; $\left(0, 0, \frac{Q}{p_3}\right)$.

36. Найти решение задачи потребителя, функция полезности которого $u=2x_1+x_1x_2$, вектор цен $p=(2,\ 5)$, располагающего суммой $Q=50$.

а) $x_1=15$; $x_2=4$; $u=90$;

б) $x_1=10$; $x_2=6$; $u=80$;

в) $x_1=12$; $x_2=8$; $u=120$.

37. Найти решение задачи потребителя, функция полезности которого $u=2x_1x_2+x_2^2$, вектор цен $p=(1,\ 2)$, располагающего суммой $Q=24$.

а) $x_1=12$; $x_2=6$; $u=180$;

б) $x_1=6$; $x_2=10$; $u=220$;

в) $x_1=8$; $x_2=8$; $u=192$.

38. Чему равна золотая норма сбережения в условиях действия производственной функции Кобба - Дугласа?

а) эластичности производства по капиталу;

б) эластичности производства по трудовым ресурсам;

в) норме амортизации.

39. Как записывается формула Эйлера для однородной функции первого порядка?

а) $F(K,L)=F(K)+F(L)$;

б) $F(K,L)=L\dfrac{\partial F}{\partial K}+K\dfrac{\partial F}{\partial L}$;

в) $F(K,L)=K\dfrac{\partial F}{\partial K}+L\dfrac{\partial F}{\partial L}$.

40. Чему равна золотая норма сбережения в модели Солоу для производственной функции Кобба-Дугласа $Y=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, если $A=50;\quad \alpha=0{,}4$?

а) 0,4;

б) 0,6;

в) 0,667.

41. Что представляет собой математически величина предельной склонности к потреблению?

а) производную дохода по потреблению;

б) производную потребления по доходу;

в) производную потребления по фактору труда.

42. На сколько должна измениться величина дохода при изменении государственных расходов на 3 млрд. руб., если остальные макроэкономические показатели остаются неизменными, а предельная склонность к потреблению $\delta C=0{,}4$?

а) 5 млрд. руб.;

б) 7,5 млрд. руб.;

в) 4,5 млрд. руб.

43. На сколько должна измениться величина дохода при изменении налоговых сборов на 3 млрд. руб., если остальные макроэкономические показатели остаются неизменными, а предельная склонность к потреблению $\delta C=0{,}4$?

а) 5 млрд. руб.;

б) 2 млрд. руб.;

в) 4,5 млрд. руб.

44. Найти значение равновесной капиталовоорцденности в модели Солоу для производственной функции Кобба-Дугласа $Y=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ с параметрами: $A=100;\quad \alpha=0{,}5$, если темп прироста

трудовых ресурсов $\mu = 0{,}05$; норма амортизации $h = 0{,}15$, норма сбережения $s = 0{,}4$.

а) 4000;

б) 20000;

в) 40000.

45. Найти значение равновесной производительности труда в модели Солоу для производственной функции Кобба-Дугласа $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ с параметрами: $A = 100$; $\alpha = 0{,}5$, если темп прироста трудовых ресурсов $\mu = 0{,}05$; норма амортизации $h = 0{,}15$, норма сбережения $s = 0{,}4$.

а) 4000;

б) 20000;

в) 40000.

46. Найти значение равновесной величины удельного потребления в модели Солоу для производственной функции Кобба-Дугласа $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ с параметрами: $A = 10$; $\alpha = 0{,}75$, если темп прироста трудовых ресурсов $\mu = 0{,}05$; норма амортизации $h = 0{,}15$, норма сбережения $s = 0{,}2$.

а) 142,24;

б) 35,56;

в) 214,7.

47. Найти значение равновесной производительности в модели Солоу для производственной функции Кобба-Дугласа $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ с параметрами: $A = 10$; $\alpha = 0{,}75$, если темп прироста трудовых ресурсов $\mu = 0{,}05$; норма амортизации $h = 0{,}15$, норма сбережения $s = 0{,}2$.

а) 142,24;

б) 177,8;

в) 314,7.

48. Если A - матрица коэффициентов прямых затрат, то какая из перечисленных ниже матриц будет являться матрицей коэффициентов полных материальных затрат?

а) $(E-A)^{-1}$;

б) $(E-A)$;

в) $(E-A)^{T}$.

49. Если определитель матрицы коэффициентов прямых затрат равен нулю, то какое из приведенных утверждений верно?

а) модель межотраслевого баланса Леонтьева не будет продуктивной;

б) такого не может быть;

в) это ничего особенного не означает.

50. Что произойдет, если среди элементов матрицы обратной к матрице коэффициентов прямых затрат будут отрицательные числа?

а) такого не может быть;

б) модель Леонтьева будет непродуктивной;

в) ничего особенного это не означает.

51. Для двухотраслевой структуры в модели Леонтьева матрица производственного потребления $(x_{ij})=\begin{pmatrix}20 & 40\\ 50 & 60\end{pmatrix}$, а вектор совокупной общественной продукции отраслей $X=\begin{pmatrix}100\\ 200\end{pmatrix}$. Найти матрицу коэффициентов прямых затрат (a_{ij}).

а) $(a_{ij})=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix}$;

б) $(a_{ij})=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}25 & 0{,}3\end{pmatrix}$;

в) $(a_{ij})=\begin{pmatrix}0{,}118 & 0{,}235\\ 0{,}294 & 0{,}360\end{pmatrix}$.

52. Для двухотраслевой структуры в модели Леонтьева матрица производственного потребления $\left(x_{ij}\right)=\begin{pmatrix}20 & 30\\ 40 & 80\end{pmatrix}$, а вектор совокупной общественной продукции отраслей $X=\begin{pmatrix}100\\ 250\end{pmatrix}$. Найти матрицу коэффициентов прямых затрат $\left(a_{ij}\right)$.

а) $\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}16 & 0{,}32\end{pmatrix}$;

б) $\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}12\\ 0{,}2 & 0{,}32\end{pmatrix}$;

в) $\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix}0{,}118 & 0{,}176\\ 0{,}235 & 0{,}471\end{pmatrix}$.

53. Что произойдет, если риски всех видов ценных бумаг, входящих в состав портфеля, не будут зависеть друг от друга?

а) эффективность портфеля повысится;

б) матрица ковариаций задачи Марковица будет вырожденной;

в) матрица ковариаций задачи Марковица будет диагональной.

54. Как будет выглядеть матрица ковариаций W задачи Марковица для трех рисковых ценных бумаг, если целевая функция задачи имеет вид: $min(\,25x_1+16x_2+64x_3+14x_1x_2+22x_2x_3\,)$?

а) $W=\begin{pmatrix}5 & 7 & 0\\ 7 & 4 & 11\\ 0 & 11 & 8\end{pmatrix}$;

б) $W=\begin{pmatrix}5 & 14 & 0\\ 14 & 4 & 22\\ 0 & 22 & 8\end{pmatrix}$;

в) $W=\begin{pmatrix}25 & 7 & 0\\ 7 & 16 & 11\\ 0 & 11 & 64\end{pmatrix}$.

55. Найти состав портфеля минимального риска для двух видов ценных бумаг: безрисковых эффективности 2 и рисковых ожидаемой эффективности 8 и риском 4, эффективность которого m_p не ниже 4.

а) доля безрисковых бумаг x_0=0,67; доля рисковых бумаг x_1=0,33;

б) доля безрисковых бумаг x_0=0,75; доля рисковых бумаг x_1=0,25;

в) доля безрисковых бумаг x_0=0,8; доля рисковых бумаг x_1=0,2.

56. Найти состав портфеля минимального риска для двух видов ценных бумаг: безрисковых эффективности 3 и рисковых ожидаемой эффективности 10 и риском 5, эффективность которого m_p не ниже 6.

а) доля безрисковых бумаг x_0=0,7; доля рисковых бумаг x_1=0,3;

б) доля безрисковых бумаг x_0=0,67; доля рисковых бумаг x_1=0,33;

в) доля безрисковых бумаг x_0=0,57; доля рисковых бумаг x_1=0,43.

57. Найти векторы затрат и выпуска для двухпродуктовой двухотраслевой модели фон Неймана, у которой матрица затрат $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, матрица выпуска $B=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, а вектор интенсивностей $z=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

а) вектор выпуска $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$; вектор выпуска $\begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix}$;

б) вектор выпуска $\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$; вектор выпуска $\begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}$;

в) вектор выпуска $\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$; вектор выпуска $\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$.

58. Найти векторы затрат и выпуска для двухпродуктовой двухотраслевой модели фон Неймана, у которой матрица затрат $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, матрица выпуска $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, а вектор интенсивностей $z=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$.

а) вектор выпуска $\begin{pmatrix}6\\ 11\end{pmatrix}$; вектор выпуска $\begin{pmatrix}9\\ 19\end{pmatrix}$;

б) вектор выпуска $\begin{pmatrix}17\\ 5\end{pmatrix}$; вектор выпуска $\begin{pmatrix}21\\ 7\end{pmatrix}$;

в) вектор выпуска $\begin{pmatrix}6\\ 11\end{pmatrix}$; вектор выпуска $\begin{pmatrix}11\\ 13\end{pmatrix}$.

59. Выберите формулировку, верно отражающую экономический смысл свойства замкнутости модели фон Неймана,

а) сумма любых продуктовых наборов из множества товаров также принадлежит этому множеству;

б) использовать в процессе производства текущего периода можно только товары, произведенные в предшествующем периоде;

в) стоимость набора товаров, входящих в матрицу затрат, не может превосходить стоимость товаров, входящих в матрицу выпуска.

60. Если обозначить P- вектор цен, A- матрицу затрат, B- матрицу выпуска в модели фон Неймана, а $t;\ \ t+1$ последовательные моменты времени, то какое из соотношений, приведенных ниже будет иметь смысл правила нулевого дохода?

а) $P_t A \geq P_{t+1} B$;

б) $P_t A \leq P_{t+1} B$;

в) $P_{e+1} A \geq P_t B$.

Литература

1. Эконометрика: учебник / И. И. Елисеева [и др.]; под ред. И. И. Елисеевой. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 576 с.: ил.
2. Валеев Н. Н. Анализ временных рядов и прогнозирование: учебное пособие / Н. Н. Валеев, А. В. Аксянова, Г. А. Гадельшина. – Казань: КГТУ, 2010. – 160 с.
3. Доугерти Кр. Введение в эконометрику / Пер. с англ. – М.: МГУ; ИНФРА-М, 2003. – 402 с.
4. Красс М.С. Математические методы и модели для магистрантов экономики: учебное пособие / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – С-Пб.: Питер, 2006. – 496 с.
5. Просветов Г. И. Математические модели в экономике: учебно-методическое пособие / Г. И. Просветов. -2-е изд.,доп. – М.: РДЛ, 2006. – 160 с.
6. Прасолов А. В. Математические методы экономической динамики: учебник / - СПб.: Лань, 2015. – 352 с.
7. Аблинская Л. В. Экономико-математическое моделирование: учебник/ Л. В. Аблинская, Л. О. Бабенко, Л. И. Баусов. – М.: Экзамен, 2006. – 800 с.
8. Степанов В. И. Экономико-математическое моделирование: учебное пособие/ В. И. Степанов, А. Ф. Терпугов. – М.: Academia, 2009. – 112 с.
9. Шапкин А. С. Математические методы и модели исследования операций: учебник/ А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. – М.: Дашков и Ко, 2009. – 400 с.
10. Нуриев Н.К., Журбенко Л.Н., Шакиров Р.Ф., Хайруллина Э.Р., Старыгина С.Д., Абуталипов А.Р. Методология проектирования дидактических систем нового поколения. – Казань, Центр инновационных технологий, 2009. – 456 с.
11. Дьяконов Г.С., Жураковский В.М., Иванов В.Г., Кондратьев В.В., Кузнецов А.М., Нуриев Н.К. Подготовка инженера в реально-

виртуальной среде опережающего обучения. – Казань: КГТУ, 2009. – 404 с.

12. Нуриев Н.К., Журбенко Л.Н., Старыгина С.Д. Дидактические системы нового поколения // Высшее образование в России. – 2010. – № 8-9. – С.128-137.

13. Нуриев Н.К., Старыгина С.Д. Эскизный проект дидактической системы природосообразно развивающего обучения // Альма-Матер – 2013. - № 3. – С.51-55.

14. Нуриев Н.К., Старыгина С.Д., Ахметшин Д.А. Алгоритм оценки качества владения компетенцией на основе показателя глубины усвоенных знаний // Альма-Матер (Вестник высшей школы) – 2015. – № 11. – С. 64-67.

15. Нуриев Н.К., Старыгина С.Д., Крылов Д.А. Дидактическая инженерия: метрическая оценка академической компетентности по технологии обучение-тест // Международный электронный журнал "Образовательные технологии и общество (Education Technology & Society)" (http://ifets.ieee.org/russian/periodical/journal.html). – 2015. – V.18. – N 3. – C. 548-574. ISSN 1436-4522.

16. Нуриев Н.К., Старыгина С.Д., Ахметшин Д.А. Дидактическая инженерия: проектирование программного обеспечения техногенной социально-образовательной среды вуза // Вестник Казанского технологического университета - 2015.– Т. 18. – № 24. – С. 109-114.

17. Старыгина С.Д., Гибадуллина Э.А., Нуриев Н.К. Дидактическая инженерия: алгоритм оценки качества освоения студентом компетенций стандарта // Вестник Марийского государственного университета. – 2015. – № 4 (19). – С. 47-50.

18. Барон Л.А., Нуриев Н.К, Старыгина С.Д. Численные методы для IT инженеров: учебное пособие для вузов. – Казань: Центр инновационных технологий, 2012. – 176 с.

19. Нуриев Н.К., Старыгина С.Д., Печеный Е.А., Гайфутдинов А.А. Технология подготовки инженера в метрическом компетентностном формате в реально-виртуальной среде развития //

Международный электронный журнал “Образовательные технологии и общество (Education Technology & Society)” (http://ifets.ieee.org/russian/periodical/journal.html). – V.15. - N 4. – C. 569-590 с. – ISSN 1436-4522.

20. Нуриев Н.К., Журбенко Л.Н., Старыгина С.Д. Системный анализ деятельности инженера. – Казань, Изд-во Казан. гос. технол. ун-та, 2008. – 88 с.

21. Нуриев Н.К., Старыгина С.Д., Пашукова Е.В. Вычислительная математика в задачах химии и химической технологии: учебное пособие. – Казань: Центр инновационных технологий, 2011. – 200 с.

Приложение 1

Математико-статистические таблицы

1. Таблица значений F-критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65

29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1

2. Критические значения t-критерия Стьюдента при уровне значимости 0,10; 0,05; 0,01 (двухсторонний)

Число степеней свободы d.f.	α			Число степеней свободы d.f.	α		
	00,10	0,05	0,01		00,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,5041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564

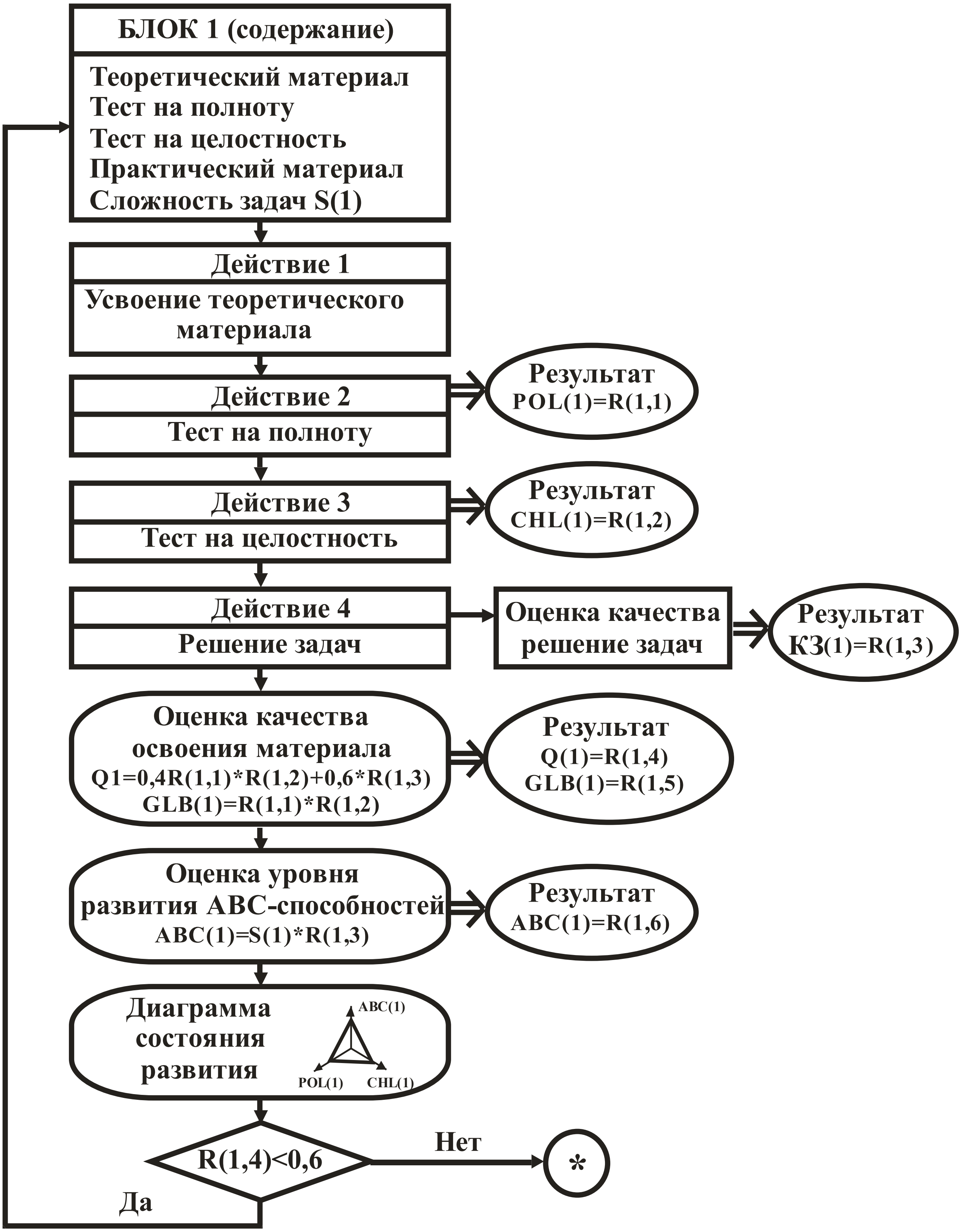
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

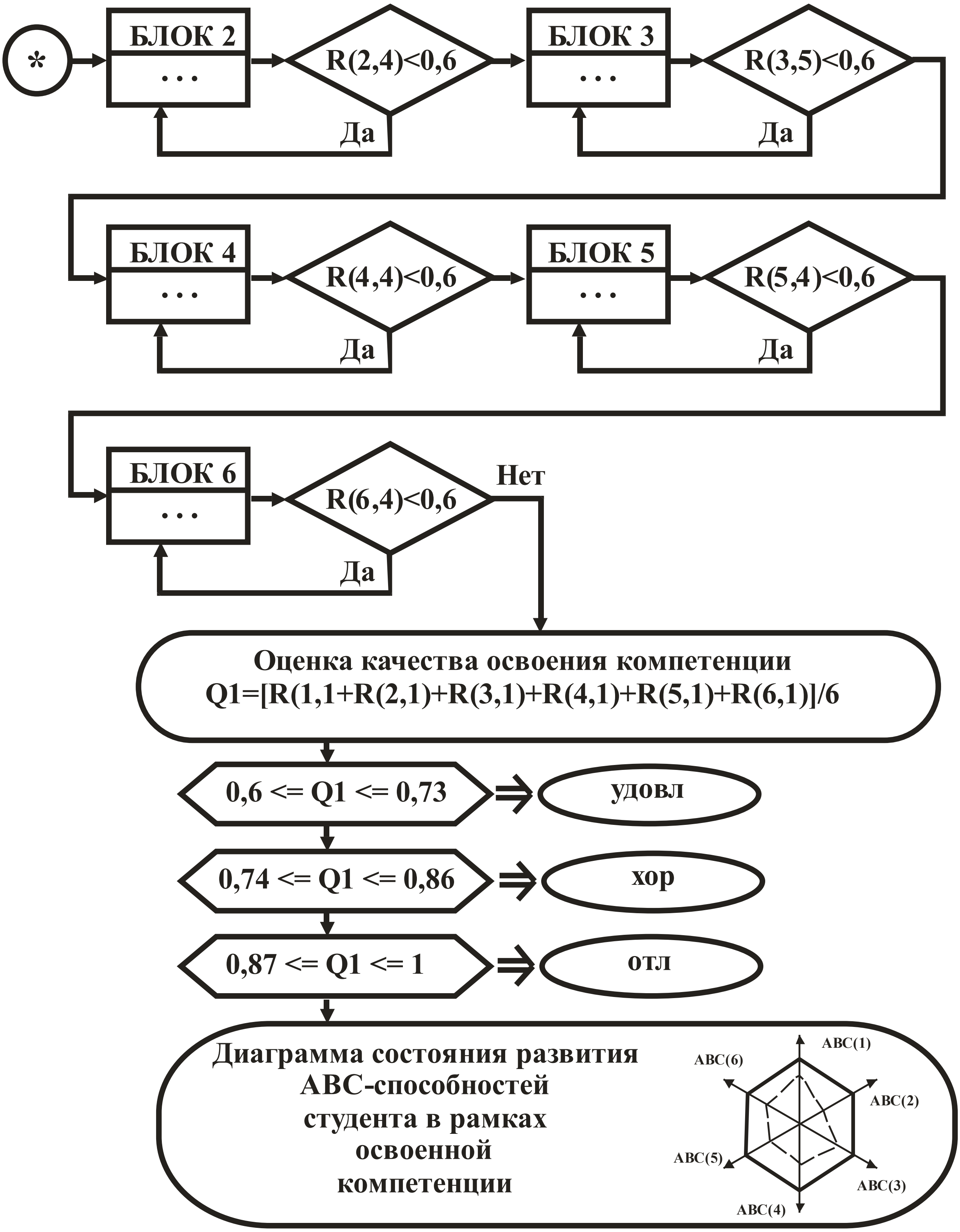
3. Значения статистик Дарбина-Уотсона $d_L d_U$ при 5%-ном уровне значимости

n	$k=1$		$k=2$		$k=3$		$k=4$		$k=5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0,61	1,40								
7	0,70	1,36	0,47	1,90						
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29				
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13				
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02				
11	0,93	1,32	0,66	1,60	0,60	1,93				
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86				
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82				
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78				
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,85	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,99
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83

Приложение 2

Технологический маршрут организации в метрическом компетентностном формате учебной деятельности





Автоматизированная система для самоподготовки, развернута на сайте www.myknitu.ru.